

**Universidad Central de Venezuela  
Facultad de Ciencias  
Escuela de Computación**

***Lecturas en Ciencias de la Computación***  
*ISSN 1316-6239*

**Técnicas de Datos Scattered  
para Trazado de Rayos Sísmicos**

Jaime Parada

RT 2012-02

Centro de Computación Paralela y Distribuida de la UCV  
CCPD-UCV  
Caracas, Junio 2012.

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA  
FACULTAD DE CIENCIAS

INFORME TÉCNICO  
TÉCNICAS DE DATOS SCATTERED  
PARA TRAZADO DE RAYOS SÍSMICOS

Realizado por:  
Jaime Alberto Parada Delgado

# Tabla de Contenido

<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
<b>2. Interpolación de Datos <i>Scattered</i></b>	<b>8</b>
2.1. Métodos de Inversa de la Distancia Ponderada . . . . .	8
2.2. Funciones de Base Radial . . . . .	10
2.3. Métodos basados en triangulación . . . . .	12
<b>3. Experimentación Numérica</b>	<b>20</b>
3.1. Pruebas Realizadas . . . . .	20
3.1.1. Pruebas con Funciones Reportadas en la Bibliografía . . . . .	21
3.1.2. Pruebas con Modelos de Capa con Dificultades de Modelado en el Trazado de Rayos . . . . .	26
<b>4. Conclusiones</b>	<b>34</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>35</b>



# Capítulo 1

## Introducción

En el ámbito científico se genera gran cantidad de datos que pueden provenir bien sea de mediciones del mundo real, o de procesos numéricos; en ambos casos los datos se originan usualmente partir de un dominio continuo, pero solo un número finito de muestras (uniformes o no uniformes) están disponibles. Una gran cantidad de aplicaciones científicas necesitan que los datos de entrada estén definidos sobre un malla regular. Si los datos de entrada no se ajustan a dicho malla regular, se requiere generar la información asociada utilizando métodos de interpolación y/o aproximación.

Cuando los datos son recogidos (o están disponibles) de una forma no uniforme se dice que son irregulares, aleatorios o *scattered*. Los datos *scattered* surgen en un gran número de campos y problemas, por ejemplo en geofísica, geología, meteorología, hidrología, sistemas electrónicos de proyección de imágenes, cartografía, en la digitalización de modelos de superficies, análisis y diseño estructural, etc. Frecuentemente estos datos deben ser interpolados o aproximados.

Para visualizar los resultados, estas aplicaciones requieren el uso de esquemas de interpolación, distintos a los utilizados sobre datos uniformemente distribuidos. Los interpolantes deben ajustar, con diferentes grados de exactitud, funciones suaves a los datos *scattered*. El resultado esperado es que la función interpolante obtenida de esta forma aproxime la función subyacente original que es el origen de los datos muestreados.

Para algunas aplicaciones, por ejemplo el modelado de formas libre, el usuario posee control sobre el interpolante a través de asas o puntos de control. En este caso, la precisión de la solución no es crítica ya que existe una retroalimentación continua con el usuario que le permite ajustar el interpolante hasta que se alcance el nivel deseado de aproximación. Por otra parte, para aplicaciones como paquetes de visualización científica, el usuario requiere cierta precisión respecto a la manipulación del interpolante sobre un conjunto de datos fijo.

# Interpolación de Datos *Scattered*

El problema de interpolación de datos *scattered* se puede plantear de la siguiente forma: Dado un conjunto finito de  $N$  puntos distribuidos irregularmente

$$P_k = (x_k, y_k, f_k), \quad k = 1, \dots, N \quad (1.1)$$

donde *scattered* implica que no se realizan suposiciones acerca de la disposición de los datos asociados a las variables independientes,  $(x_k, y_k), k = 1, \dots, N$ ; excepto que no existen puntos repetidos, el problema es construir una función (probablemente suave)  $F(x, y)$  que tome el valor  $f_k$  sobre los puntos  $(x_k, y_k), k = 1, \dots, N$ ; esto es [15],

$$F(x_k, y_k) = f_k, \quad k = 1, \dots, N \quad (1.2)$$

En algunos casos puede ser preferible, por diversas razones tales como errores en los datos o un número de datos muy grande, resolver el problema más general de aproximación. Aunque este trabajo se concentra en el caso de dos (2) variables independientes, algunos de los métodos se pueden extender de manera inmediata a más variables independientes, mientras que en otros es difícil o hasta imposible.

El planteamiento del problema de interpolación es bastante sencillo, y el problema análogo en una sola dimensión tiene solución garantizada y diversas maneras de resolverlo adecuadamente para muchas aplicaciones. La diferencia principal estriba en que los problemas de interpolación de datos *scattered* en dos o más dimensiones son muchos más difíciles de resolver que el correspondiente problema de una sola variable [1]. En general, no se puede garantizar ni siquiera la *existencia* de una solución para el problema de interpolación en más de una variable para funciones base dadas (por el teorema de Haar [7]). Aún en aquellos casos donde el sistema de ecuaciones correspondiente posea una solución, ésta se encuentra con frecuencia muy mal condicionada.

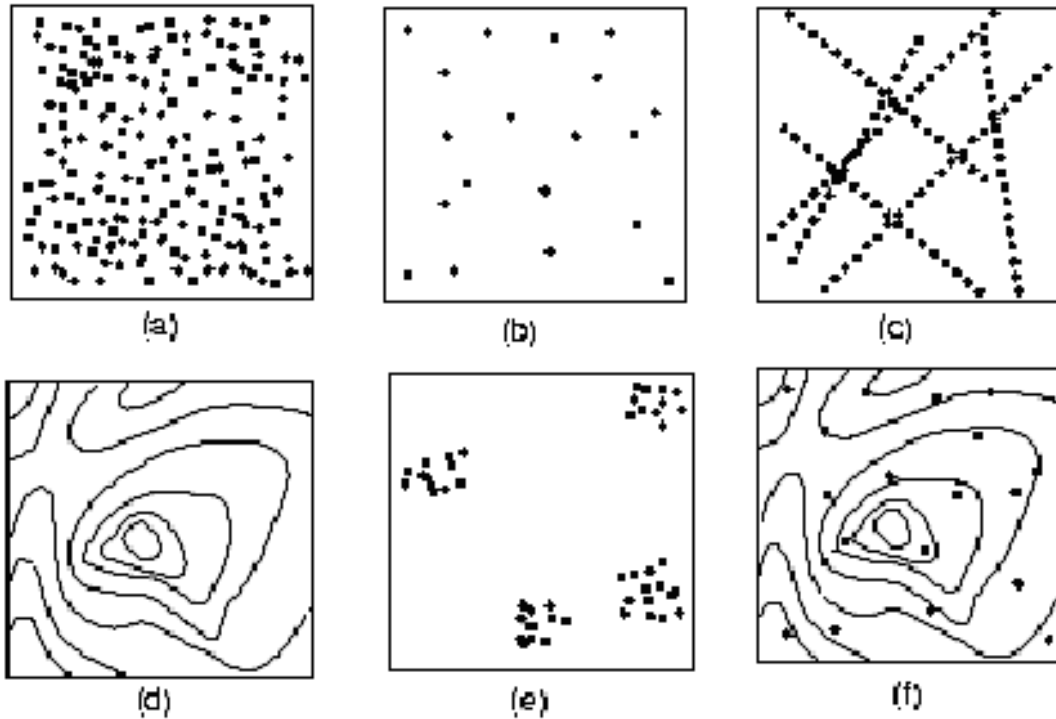
Los datos normalmente representan mediciones o valores calculados de alguna cantidad física (una función subyacente la cual se desea aproximar). La función aproximada permite proporcionar valores en puntos donde puede resultar imposible (o muy costoso) obtener mediciones, proporcionar aproximaciones a las derivadas o integrales de la función subyacente, o proporcionar una representación visual de los datos en la forma de una gráfica de superficie o una gráfica de contorno. En algunas aplicaciones el problema es seleccionar los parámetros que se ajustan dentro de un modelo de la función subyacente, en otras aplicaciones el problema es suavizar el ruido en los valores de los datos [2].

Así como hay diversas aplicaciones para la interpolación y aproximación de datos *scattered*, también existen muchos métodos diferentes. Ningún método trabaja bien en todos los casos. La elección de cuál método usar en un caso particular, depende completamente del problema tratado (distribución de los puntos de datos) y también de varias condiciones secundarias (tales como el hardware disponible), puesto que los diversos métodos requieren cantidades de cómputo en tiempo y memoria absolutamente diversas [1].

En un *método global*, el interpolante depende de todos los puntos de datos a la vez, en el sentido de que añadir, cambiar o eliminar un punto de los datos implica que se debe resolver el problema nuevamente. Esto significa normalmente resolver un sistema lineal de  $N+1$  ecuaciones, para  $N$  muy grande (miles o millones). A menudo este sistema no es *sparse* y usualmente está mal condicionado.

En un *método local*, añadir, cambiar o eliminar un punto de los datos afecta el interpolante sólo localmente, i.e., en un cierto subconjunto del dominio. Sin embargo, en la práctica con frecuencia se pierde ya que para datos *scattered* reales, los cuales se asume que están "distribuidos aleatoriamente", se debe primero comparar todos los puntos de datos uno con otro para poder decidir cuáles puntos influyen sobre cuáles partes de la superficie [1]. Más aún, los métodos globales frecuentemente producen superficies más "agradables" que los locales, en particular cercano a las fronteras del dominio [13].

La Figura 1.1(a)-(f) muestra seis conjuntos de datos con distribuciones de puntos completamente diferentes.



**Figura 1.1:** Diversas distribuciones de puntos *scattered*

Un conjunto de datos muy grande (denso), en muchos casos sujeto a errores, como el mostrado en la Figura 1.1(a), debe ser tratado de forma diferente al mostrado en la Figura 1.1(c). Los datos mostrados en la Figura 1.1(a) son adecuados para construir una triangulación, pero los datos en la Figura 1.1(c) no lo son, puesto que probablemente se crearían muchos triángulos largos y finos.

Los datos en la Figura 1.1(b) son pocos y están distribuidos uniformemente, por esto podrían ser convenientes para la interpolación. Sin embargo, usar tal método para los datos en la Figura 1.1(e) causará probablemente problemas en las áreas que no tienen datos. Para el último caso, las tendencias globales que conectan los clusters de puntos quizás serían deseadas en la aproximación, llevando a la escogencia de algún método global.

Para conjuntos de datos muy grandes, se suelen combinar métodos locales y globales. Por ejemplo, para subconjuntos apropiados de datos podríamos aplicar primero un método global, y luego utilizar este resultado para construir un interpolante global definido localmente.

## La Tomografía Sísmica

Un problema fundamental de la Geofísica lo constituye el determinar las características de una región específica del subsuelo. Esto es muy importante en exploración petrolera, ya que el conocer la forma de las interfaces entre las diferentes capas de roca y el determinar su densidad, nos proporciona información valiosa para determinar regiones del subsuelo donde pueden haberse acumulado hidrocarburos.

El objetivo de los métodos de tomografía sísmica es construir una imagen sintética de una región del subsuelo que se desea explorar. Al resolver el problema de inversión sísmica se pretende determinar las características de un medio partiendo de los datos proporcionados por las ondas sísmicas que se propagan a través de él.

En un algoritmo de tomografía sísmica se parte de un modelo parametrizado del medio que se desea caracterizar y utilizando este modelo como mejor estimado del medio, se determina la trayectoria que seguirían las ondas sísmicas al propagarse y se establece el tiempo de viaje empleado para cubrir esa trayectoria. Este paso se conoce como solución del problema directo y generalmente se resuelve mediante la aplicación de un algoritmo trazador de rayos sísmicos (tridimensional).

La comparación de los tiempos de viaje obtenidos al simular la propagación de las ondas en el modelo del medio, con los datos reales de tiempo de viaje de las ondas, permite ajustar los parámetros que definen el modelo del medio, con el fin de reducir progresivamente las diferencias.

En las dos etapas bosquejadas anteriormente del algoritmo de tomografía sísmica juega un papel crucial la construcción de superficies que interpolen o aproximen lo mejor posible las interfaces que separan las distintas capas del subsuelo [18]. Comúnmente estas superficies deben modelarse con algún tipo de función de interpolación. La función de interpolación determina los parámetros a modificar durante el proceso de inversión.

Existe en la literatura diversos trabajos que para modelar las interfaces utilizan superficies parametrizadas sobre mallados con distribución regular de nodos (e.g., Splines and B-Splines).



Esta forma de modelar las superficies interfaces aumenta de manera considerable la dimensionalidad de la fase de inversión posterior [22]. Adicionalmente, no permite incluir de manera directa información acerca de ubicaciones reales de las superficies interfaces - información que puede provenir de pozos en producción, estudios de núcleo, estudios geológicos, etc.

En el siguiente reporte se realiza una revisión comparativa y se implementan algunas técnicas de interpolación de datos *scattered*, evaluando su comportamiento contra funciones de prueba reportadas por la bibliografía y configuraciones de posibles medios encontrados en estudios geofísicos. Esta revisión servirá como base para una fase posterior de evaluación de las técnicas, incorporadas dentro de un trazador de rayos que esté disponible.

## Resto del Documento

En el Capítulo 2 se exponen algunos enfoques que se han utilizado para resolver el problema de interpolación de datos *scattered*. En particular se estudian las basadas en el método de Shepard, en las funciones de base radial, y las basadas en triangulaciones.

En el Capítulo 3 se muestran algunos resultados obtenidos con el fin de evaluar las diversas técnicas estudiadas sobre diversos modelos sintéticos.

Finalmente, con base en los resultados obtenidos se presentan las conclusiones en el Capítulo 4.

# Capítulo 2

## Interpolación de Datos *Scattered*

### Introducción

Shumaker [27] introduce el problema de aproximación de datos scattered.

El tema de la interpolación de datos *scattered* es muy extenso. Existe gran cantidad de soluciones planteadas para estos problemas, así como también excelentes estudios donde múltiples investigadores han clasificado de forma diversa las soluciones a los problemas de interpolación de datos scattered [4, 13, 20, 27]. Además, algunos autores han realizado estudios de métodos de datos scattered aplicados a ciertos dominios, como sistemas de imágenes electrónicas [5] y para la reconstrucción de interfaces geológicas complejas [11].

A continuación se presenta una revisión de algunas de las técnicas más populares que se han usado ampliamente para resolver el problema planteado.

### 2.1. Métodos de Inversa de la Distancia Ponderada

Una de las técnicas más comúnmente utilizadas para la interpolación de datos scattered, y donde existen los trabajos más antiguos de este campo, es la interpolación de la inversa de la distancia ponderada (*Inverse Distance Weighted* - IDW). Los métodos de inversa de la distancia ponderada fueron desarrollados en principio por meteorólogos y geólogos, y también son conocidos como "Métodos de Shepard" debido al nombre del primer contribuyente en este campo. Estos métodos son básicamente globales. Su premisa básica es que los valores interpolados deben ser mayormente influenciados por los puntos más cercanos y de menor manera por los puntos más distantes. El valor de interpolación en cada nuevo punto  $P$  es un promedio pesado de los valores de los puntos *scattered*, y el peso asignado a cada punto *scatter* disminuye a medida que la distancia desde el punto de interpolación a cada punto *scatter* se incrementa. Como veremos en breve, existen muchas formas distintas de escoger estos pesos.

Shepard definió su función interpolante de datos scattered  $F(x, y)$  como un promedio pesado de los valores de las ordenadas  $f_i$ , eligiendo algunas funciones de blending o funciones de peso. De forma más precisa,

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^N w_i(x, y) f_i, \quad (2.1)$$

con las funciones de peso (funciones base)

$$w_i(x, y) = \frac{\sigma_i(x, y)}{\sum_{j=1}^N \sigma_j(x, y)}, \quad (2.2)$$

donde,

$$\sigma_i(x, y) = \frac{1}{d_i(x, y)^{\mu_i}} = \frac{1}{[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2]^{\frac{\mu_i}{2}}}, \quad (2.3)$$

y donde  $d_i(x, y)$  es la distancia Euclídeana entre los puntos  $(x, y)$  y  $(x_i, y_i)$ :

$$d_i(x, y) = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}.$$

Este es un tipo de *método de distancia inversa con pesos*, i.e., a medida que la distancia de  $(x, y)$  a  $(x_i, y_i)$  es más grande, es menor la influencia que  $f_i$  tiene sobre el valor de  $f$  en el punto  $(x, y)$ . Las funciones  $w_i(x, y)$  poseen las siguientes propiedades:

1. Continuidad:  $w_i(x, y) \in C^0$ ,
2. Positiva:  $w_i(x, y) \geq 0$ ,
3. Propiedad de interpolación ( $f(x_i, y_i) = f_i$ ):  $w_i(x_j, y_j) = \delta_{ij}$ ,
4. Partición de la unidad (normalización):  $\sum_{i=1}^N w_i(x, y) = 1$ .

Derivando en (2.1), se puede mostrar que la función de Shepard tiene:

1. picos en  $(x_i, y_i)$  si  $0 < \mu_i < 1$ ,
2. esquinas en  $(x_i, y_i)$  si  $\mu_i = 1$ ,
3. zonas planas en  $(x_i, y_i)$  si  $\mu_i > 1$ , i.e., los planos tangentes sobre tales puntos son paralelos al plano  $(x, y)$ .

Con el objetivo de minimizar el tiempo computacional, es recomendable escoger  $\mu_i = 2$ , dado que de esta manera no se necesita calcular la raíz en (2.3). Sin embargo, esta escogencia hace que puntos distantes tengan una influencia bastante grande, lo que para valores grandes de  $N$  conduce a inestabilidad numérica. En vista de esto, cuando se programa (2.2), siempre se utiliza la siguiente expresión equivalente

$$w_i(x, y) = \frac{\prod_{j \neq i} d_j(x_i, y_i)^{\mu_i}}{\sum_{k=1}^N \prod_{j \neq k} d_j(x_i, y_i)^{\mu_i}}, \quad (2.4)$$

la cual es numéricamente más estable. Una implementación detallada del método puede ser encontrada en [23].

Además de las debilidades obvias del método de Shepard [3], se observa que los  $w_i(x_i, y_i)$  deben ser recalculados cada vez que un punto de los datos cambia, o es añadido o eliminado algún punto. Esto implica que el método de Shepard es un método global.

Diversos estudios ilustran este método y la familia de métodos generados a partir de él [4, 6, 13, 21, 27]. El método original presenta diversas desventajas tales como picos, esquinas y zonas planas sobre los puntos de datos; adicionalmente este método es global, requiriendo que todos los pesos sean recalculados si un punto de datos es añadido, removido o modificado [19]. Franke y Nielson proponen el método cuadrático modificado de Shepard [12], el cual soluciona algunas de las deficiencias anteriores y produce una interpolación continua  $C^1$  [19].

## 2.2. Funciones de Base Radial

Los problemas de interpolación de datos scattered también pueden ser resueltos usando funciones de base radial. Para un estudio detallado de la aplicación de funciones de base radial en el modelado de datos scattered se recomienda el libro de Iske [17].

En este caso el interpolante tiene la siguiente forma

$$F(x, y) = \sum_{k=1}^N \alpha_k \phi(r_k) + p_m(x, y), \quad p_m(x, y) = \sum_{l=1}^M \beta_l p_l(x, y), \quad (2.5)$$

donde: la función  $\phi(r_k)$ , con  $r_k = \sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2}$ , es conocida como una *función radial* (debido a que depende solamente de la distancia euclídea entre los puntos  $(x, y)$  y  $(x_k, y_k)$ ). Los puntos  $(x_k, y_k)$  son conocidos como *centros* o *nodos*. En particular, la función  $\phi(r_k)$  es radialmente simétrica alrededor del centro  $(x_k, y_k)$ . Se observa que la solución al problema de interpolación de datos *scattered* es obtenido considerando una combinación lineal de una función de base radial escogida convenientemente. Una de las principales ventajas de las técnicas de función de base radial es que, a diferencia de la mayoría de los otros métodos, este enfoque no requiere ninguna información acerca de la conectividad de los puntos de datos scattered. Además los interpolantes radiales son invariantes bajo traslaciones o rotaciones [20].

El término polinomial en (2.5),  $p_l(x, y)$ ,  $l = 1, \dots, M$ , es cualquier base para el espacio  $\mathbb{P}_m$  de polinomios de dos variables de grado menor que  $m$ , y además  $M = \frac{m(m+1)}{2}$ . Para  $m = 0, 1, 2$  se corresponde a los casos donde: no se agrega un polinomio, se agrega una función constante, o se añade un polinomio lineal al interpolante respectivo. Para satisfacer las condiciones de

interpolación, se plantea el siguiente sistema de  $N$  ecuaciones lineales con  $N$  incógnitas  $\alpha_k, k = 1, \dots, N$ , cuando  $m = 0$ :

$$\sum_{k=1}^N \alpha_k \phi(r_{ik}) = f_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.6)$$

donde  $r_{ik} = \sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2}$  es la distancia euclídea entre los puntos  $(x_i, y_i)$  y  $(x_k, y_k)$ . Cuando  $m \neq 0$ , un sistema ligeramente modificado de  $N + M$  ecuaciones lineales en  $N + M$  incógnitas  $\alpha_k, k = 1, \dots, N$  y  $\beta_l, l = 1, \dots, M$  es formulada como sigue:

$$\sum_{k=1}^N \alpha_k \phi(r_{ik}) + \sum_{l=1}^M \beta_l p_l(x_i, y_i) = f_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.7)$$

$$\sum_{k=1}^N \alpha_k p_l(x_k, y_k) = 0, \quad l = 1, \dots, M, \quad (2.8)$$

Las condiciones en (2.8) pueden ser interpretadas físicamente como condiciones de equilibrio (la suma de todas las fuerzas y todos los momentos es igual a cero), ver [14]. También se puede considerar como una garantía de que todos los polinomios de  $\mathbb{P}_m$  se *reproducen* exactamente (es decir, que el método posee *precisión* polinomial). Es más, dado  $p(x, y) \in \mathbb{P}_m$  y estableciendo  $f_i = p(x_i, y_i)$ , entonces para  $\alpha_i = 0, i = 1, \dots, N$ , (2.8) se cumple y nos queda  $p_m(x, y) = p(x, y)$ , i.e., el esquema reproduce los elementos en  $\mathbb{P}_m$ , ver [4, 8, 9].

Combinando (2.7) y (2.8), obtenemos el sistema lineal

$$\begin{bmatrix} A_{\phi, X} & P_X \\ P_X^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

donde

$$A_{\phi, X} = (\phi(r_{ik}))_{1 \leq k, i \leq N} \in \mathbb{R}^{N \times N}$$

y

$$P_X = (p_l(x_k, y_k))_{1 \leq k \leq N; 1 \leq l \leq M} \in \mathbb{R}^{N \times M} \quad (2.10)$$

La interpolación con funciones de base radial posee tres características básicas:

- (a) es *libre de mallas*;
- (b) funciona para cualquier conjunto de datos  $f_i$ ;
- (c) funciona en espacios de dimensión arbitraria  $d$ .

Debido a la propiedad  $a$ , la interpolación con funciones de base radial no requiere procesamiento adicional para la *generación de grid*. La implementación requiere trabajar básicamente con métodos estándar del álgebra lineal numérica.

La Tabla 2.1 presenta algunos ejemplos de funciones de base radial con soporte global, lo que significa, que estas funciones no se anulan en ningún intervalo. En estos ejemplos,  $h$  es un parámetro. Para una adecuada escogencia de este parámetro, se recomienda leer [25].

Función de Base Radial	$\phi(r_k) =$
Multicuádrica de Hardy	$\sqrt{r_k^2 + h^2}$
Spline de Placa Delgada	$r_k^2 \log r_k$
Multicuádrica Inversa	$\frac{1}{\sqrt{r_k^2 + h^2}}$
Gausiana	$\exp -h^2 r_k^2$

**Tabla 2.1:** Algunas funciones de base radial con soporte global

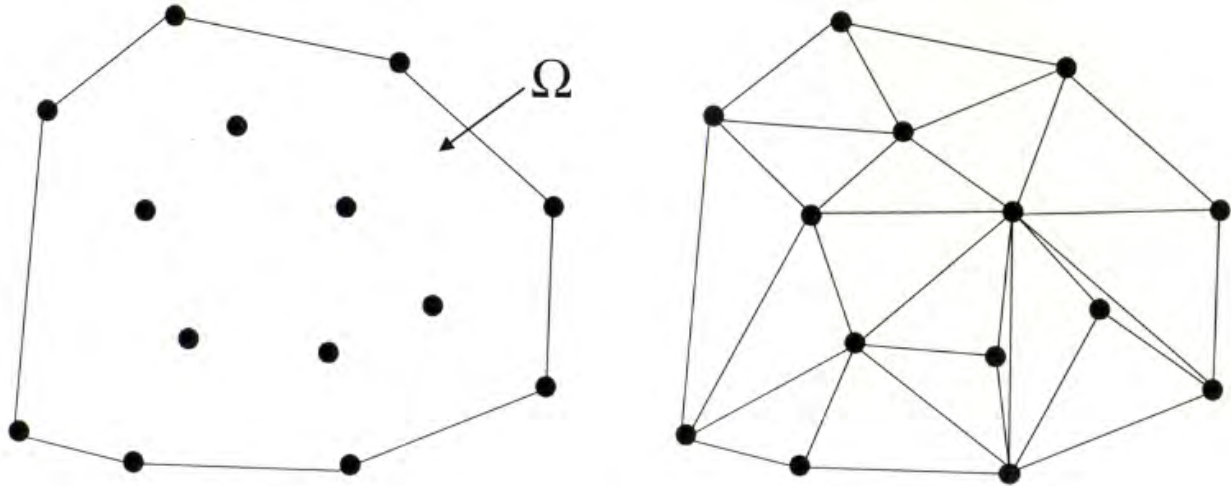
Desarrollos posteriores [29] han proporcionado funciones de base radial con *soporte compacto*, una de las cuales es la función de Wendland  $\phi(r_k) = (1 - r_k)^4 + (4r_k + 1)$ .

## 2.3. Métodos basados en triangulación

Otra clase de soluciones a la interpolación de datos scattered es conocida como *métodos basados en triangulación*. Consisten principalmente en triangular los puntos de datos del dominio en el plano, esto es, se construye una triangulación de la envolvente convexa del conjunto de puntos de datos  $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2, i = 1, \dots, N$ , donde los vértices  $P_i$  de la triangulación coinciden con los  $(x_i, y_i)$ . Luego se construye un parche de superficie sobre cada triángulo de la triangulación que interpole los datos originales (y posiblemente las derivadas) sobre los vértices  $P_i$ . En vista de la forma del interpolante (el cual es similar a los usados en los métodos de elementos finitos) son conocidos como métodos de elementos finitos (FEM). En el caso más simple, podemos obtener una representación lineal por trozos con continuidad  $C^0$  la cual interpola los valores de la función en los vértices. Sin embargo a menudo, se requiere utilizar polinomios de mayor grado para asegurar condiciones de continuidad entre los parches  $C^r$  (con  $r \geq 1$ ).

### Triangulación del Conjunto de Puntos

Una triangulación se construye a partir de una colección de triángulos. Es necesario imponer ciertas restricciones para organizar dicha colección y hacer las triangulaciones más fáciles de manejar. Se deben imponer restricciones de forma que una triangulación  $\Delta$  se convierta en una subdivisión de un dominio en una colección de triángulos conectados no solapados. Los triángulos de una triangulación están formados por los puntos dados en el dominio  $\Omega$  de interés, ver Figura 2.1. Estos puntos bien pueden ser dados o seleccionados a través de algún procedimiento adecuado.



**Figura 2.1:** Un dominio con puntos y una triangulación

En la mayoría de los casos cuando se construyen triangulaciones, se comienza con una colección dada de puntos, por ejemplo

$$P = \{p_i\}, i = 1, \dots, N,$$

y un dominio  $\Omega$  el cual contiene todos los puntos en  $P$ . Se asume que la frontera de  $\Omega$  es uno o más *polígonos simples* cerrados. Un polígono simple es un polígono que no se intersecta a sí mismo. En muchos casos se prefiere que  $\Omega$  sea la *envolvente convexa* del conjunto de puntos.

**Definición 2.3.1** (Envolvente convexa y conjunto convexo). La envolvente convexa de un conjunto de puntos  $P$  es el conjunto convexo más pequeño que contiene a  $P$ . Un conjunto  $S$  es convexo si cualquier segmento de línea que une dos puntos en  $S$  se encuentra completamente en  $S$ .

La Figura 2.1 muestra un dominio convexo  $\Omega$  con un conjunto de puntos en el plano y una triangulación correspondiente a esos puntos. Se denota la frontera de  $\Omega$  por  $\partial\Omega$ .

En adelante se utilizará la palabra *punto* cuando se referencie la posición geométrica en el plano de un vértice en una triangulación. El vértice (o nodo) de una triangulación denota un elemento topológico, que no necesariamente posee una posición geométrica. La topología de una triangulación se refiere a las relaciones entre sus vértices, aristas y triángulos. Se asocian los puntos  $p_i, p_j$  y  $p_k$  con los vértices  $v_i, v_j$  y  $v_k$ . Un triángulo  $t_{i,j,k}$  (o  $t_{ijk}$ ) en una triangulación  $\Delta$  está delimitado por los tres vértices  $v_i, v_j$  y  $v_k$ . Se asume que el triple  $(i, j, k)$  está ordenado de forma tal que los vértices se ubican alrededor del triángulo en el sentido contrario a las manecillas del reloj. No se asume que las aristas estén ordenadas, esto es  $e_{i,j}$  y  $e_{j,i}$  representan la misma arista entre  $v_i$  y  $v_j$ .

## Métodos de Triangulación

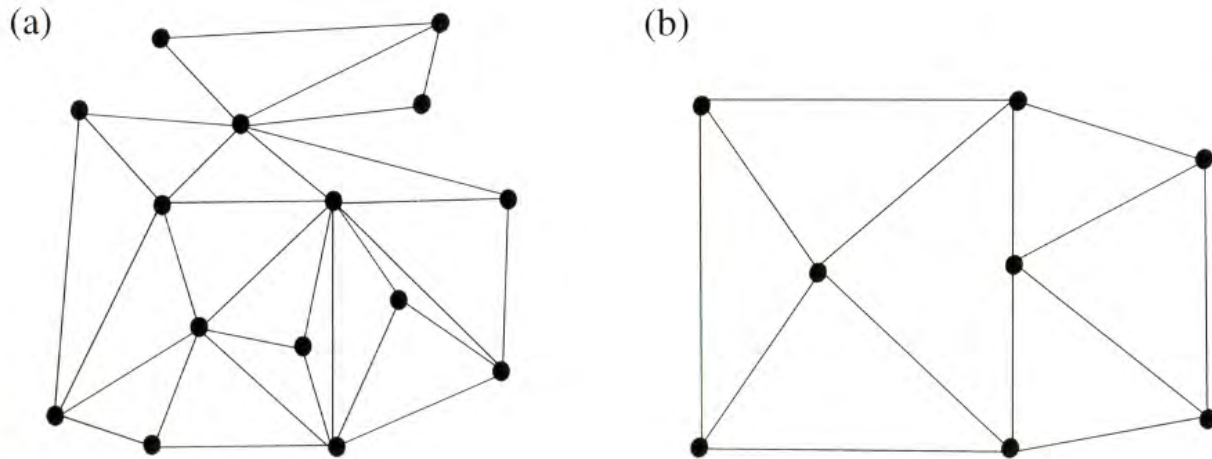
Sea  $\mathcal{P} = \{p_i = (x_i, y_i)\}_{i=1}^N$  un conjunto de  $N$  puntos  $p_i$  en el plano  $x - y$ , y sea  $\Omega$  la envolvente convexa de  $\mathcal{P}$ .

**Definición 2.3.2.** Un conjunto  $\mathcal{T} = \{(\alpha_j, \beta_j, \gamma_j) : 1 \leq \alpha_j, \beta_j, \gamma_j \leq N\}$  que consiste de  $M$  triples de enteros  $(\alpha_j, \beta_j, \gamma_j)$  define una *triangulación* de  $\mathcal{P}$  a condición de que:

- (I) para cada  $j = 1, \dots, M$ , los puntos  $p_{\alpha_j}, p_{\beta_j}, p_{\gamma_j}$  son los vértices de un triángulo no degenerado  $t_j$ ,
- (II) cada triángulo está definido por exactamente 3 puntos en  $\mathcal{P}$  los cuáles son los vértices del triángulo,
- (III) la intersección del interior de dos triángulos  $t_j, t_k$  es vacía siempre que  $j \neq k$ ,
- (IV) la unión de todos los triángulos es la envolvente convexa de  $\mathcal{P}$ .

Si se cumplen los cuatro (4) puntos enunciados anteriormente, se dice que la triangulación es *válida*. Además, también conviene hacer referencia a tres (3) propiedades adicionales, que convierten la triangulación en *regular*:

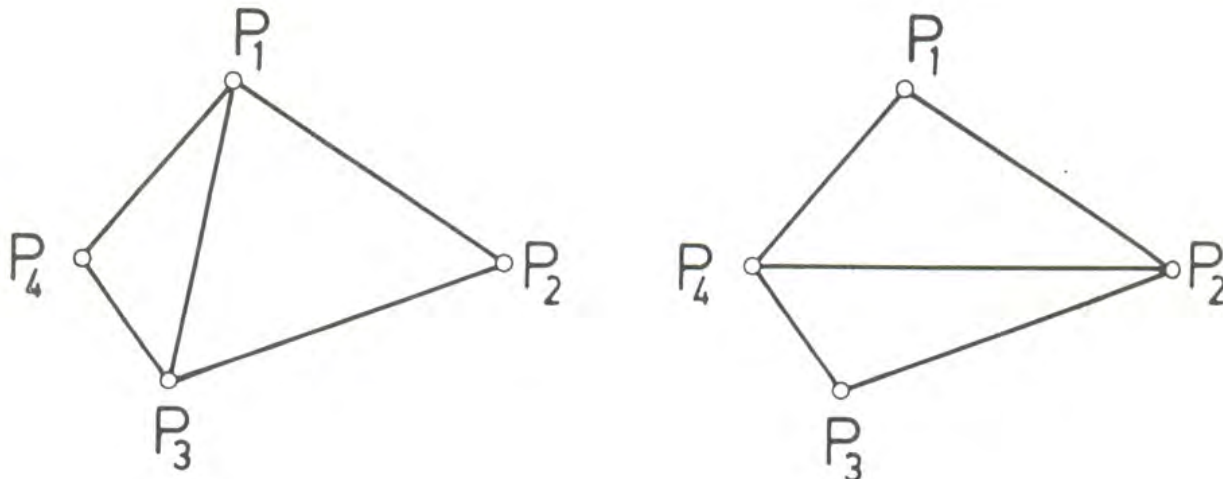
- (I) el dominio  $\Omega$  debe estar conectado.
- (II) la triangulación no debe poseer hoyos.
- (III) si el vértice  $v_i$  es un vértice en la frontera  $\partial\Omega$ , entonces deben haber exactamente dos aristas de frontera que posean a  $v_i$  como vértice común. Esto implica que el número de vértices de frontera es igual al número de aristas de frontera.



**Figura 2.2:** (a) Una triangulación válida que no es regular, (b) una triangulación que no es válida

La triangulación en la Figura 2.1 es válida y regular de acuerdo a los requerimientos anteriores. La Figura 2.2(a) muestra una triangulación válida que no es regular ya que más de dos (2) aristas de frontera se unen en uno de los vértices de frontera. La triangulación de la parte (b) de la figura no es válida de acuerdo al requerimiento III.





**Figura 2.3:** Triangulaciones alternativas para cuatro puntos

Dado que para 4 puntos hay más de una triangulación (observe la Figura 2.3), la pregunta que surge inmediatamente es cómo escoger la *mejor* triangulación.

Como un ejemplo de un criterio simple para comparar dos triangulaciones  $\mathcal{T}$  y  $\tilde{\mathcal{T}}$  de cuatro puntos tenemos:

**Definición 2.3.3** (Criterio de la diagonal más corta). La triangulación  $\mathcal{T}$  de cuatro puntos es *mejor* que la triangulación  $\tilde{\mathcal{T}}$  (con respecto al criterio de la diagonal más corta) a condición de que  $d \leq \tilde{d}$ , donde  $d$  es la longitud de la diagonal  $p_i p_k$  de la triangulación  $\mathcal{T}$ , y  $\tilde{d}$  es la longitud de la diagonal  $p_j p_l$  de  $\tilde{\mathcal{T}}$ .

Mientras que este criterio es bastante simple de implementar, no evita que se seleccione una triangulación con triángulos muy delgados, los cuales deben ser evitados para la interpolación.

**Definición 2.3.4** (Criterio de ángulo max-min). La triangulación  $\mathcal{T}$  es *mejor* que la triangulación  $\tilde{\mathcal{T}}$  (con respecto al criterio de ángulo max-min) a condición de que  $\alpha(\mathcal{T}) > \alpha(\tilde{\mathcal{T}})$ , donde  $\alpha(\mathcal{T}) = \min\{\alpha(t_j) : t_j \in \mathcal{T}\}$  y  $\alpha(t_j)$  es el ángulo más pequeño en el triángulo  $t_j$ , y  $\alpha(\tilde{\mathcal{T}})$  se define de manera similar.

Algunos autores han mostrado que la utilización del ángulo más grande en la triangulación conduce a una cota mayor en el error para la aproximación polinomial que el que produce utilizar el ángulo más pequeño [1]. Esto sugiere que en lugar de intentar hacer el ángulo más pequeño lo más grande posible, puede ser mejor intentar hacer el ángulo más grande en el triángulo lo más pequeño posible. Esto lleva a introducir el siguiente criterio:

**Definición 2.3.5** (Criterio de ángulo min-max). La triangulación  $\mathcal{T}$  es *mejor* que la triangulación  $\tilde{\mathcal{T}}$  (con respecto al criterio de ángulo min-max) a condición de que  $\alpha(\mathcal{T}) > \alpha(\tilde{\mathcal{T}})$ , con  $\alpha(\mathcal{T}) = \max\{\alpha(t_j) : t_j \in \mathcal{T}\}$ , donde  $\alpha(t_j)$  es el ángulo más grande en el triángulo  $t_j$ , y  $\alpha(\tilde{\mathcal{T}})$  se define de manera similar.

Algunos otros posibles criterios para comparar triangulaciones incluyen:

- *Criterio de los radios max-min*: Se escoge la triangulación para la cual se maximiza el mínimo de los radios del conjunto de círculos inscritos en los triángulos de la triangulación.
- *Criterio de los radios min-max*: Se escoge la triangulación para la cual se minimiza el máximo de los radios del conjunto de círculos inscritos en los triángulos de la triangulación.
- *Criterio del área max-min*: Se escoge la triangulación para la cual se maximiza el mínimo de las áreas de los triángulos en la triangulación.
- *Criterio de la altura max-min*: Se escoge la triangulación para la cual se maximiza el mínimo de las alturas de los triángulos en la triangulación.

Los criterios listados con anterioridad son todos diferentes, pero para cualesquiera dos de ellos existen algunas escogencias de cuatro puntos para los cuales los dos métodos conducen a la misma triangulación.

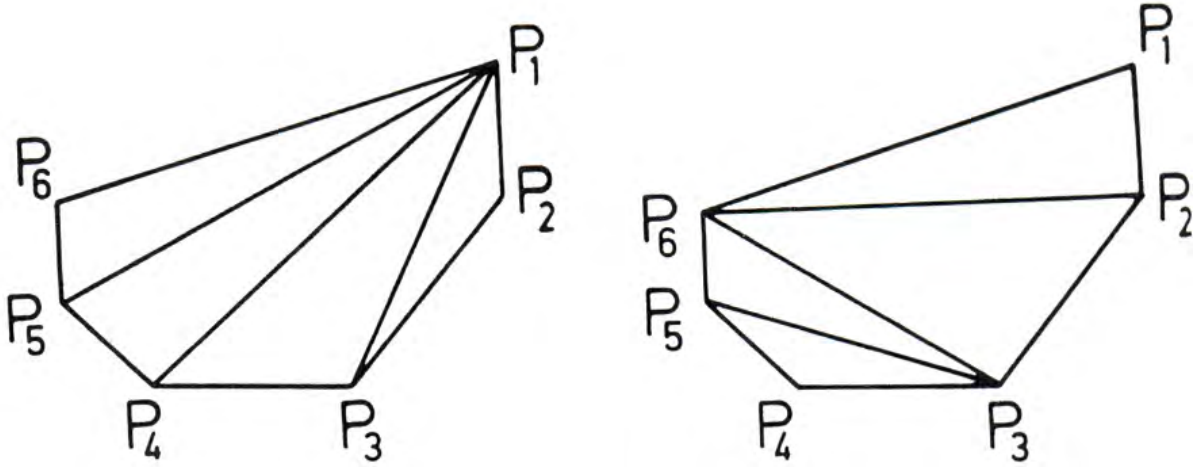
## Triangulaciones Óptimas

Los criterios introducidos en la sección previa para comparar dos triangulaciones alternativas de un conjunto de cuatro puntos también pueden ser utilizados para construir triangulaciones *óptimas* de un conjunto más amplio de puntos. Una manera de llevarlo a cabo es comenzar con cuatro puntos, y luego ir añadiendo un punto a la vez (por ejemplo, el que se encuentra más cercano a una de las caras de la triangulación actual). Luego se debe determinar si el resultado de tal algoritmo es una triangulación *óptima*, i.e., si la aplicación de los criterios localmente conducen a un óptimo global. Esto sugiere (cfr. [28]):

**Definición 2.3.6.** Una triangulación  $\mathcal{T}$  se dice que es localmente óptima con respecto a un criterio  $K$  a condición de que cada cuadrilátero definido por un par de triángulos en  $\mathcal{T}$  los cuales compartan una arista común estén optimamente triangulados con respecto a  $K$ .

Para un conjunto de puntos dado, pueden haber diversas triangulaciones localmente óptimas. Por ejemplo, las dos triangulaciones de la Figura 2.4 son localmente óptimas con respecto a la prueba de ángulo min-max.

Para obtener un criterio global, se parte de algún criterio local para comparar triangulaciones y se construye un vector con  $M$  componentes, donde  $M$  es el número de triángulos. En particular, si  $\alpha(T_j)$  es una medida para la *calidad numérica* de un triángulo  $T_j$  (e.g. una de las cantidades involucradas en los criterios discutidos anteriormente), entonces se define un vector  $\alpha(\mathcal{T}) = (\alpha_1, \dots, \alpha_M)$  para que sea el resultado de ordenar las cantidades  $\alpha(T_j)$  en orden creciente (o decreciente). Luego si  $\mathcal{T}$  y  $\tilde{\mathcal{T}}$  son dos triangulaciones, podemos compararlas utilizando el *orden lexicográfico* para vectores: dados dos vectores  $\alpha(\mathcal{T})$  y  $\alpha(\tilde{\mathcal{T}})$ , se dice  $\alpha(\mathcal{T}) < \alpha(\tilde{\mathcal{T}})$  a condición de que exista algún  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $\alpha_i = \tilde{\alpha}_i$  para  $i = 1, \dots, k-1$  y  $\alpha_k < \tilde{\alpha}_k$ .



**Figura 2.4:** Dos triangulaciones distintas. Las dos son localmente óptimas con respecto al criterio de ángulo min-max

**Definición 2.3.7.** Una triangulación  $\mathcal{T}$  de un conjunto de puntos  $\mathcal{P}$  se dice que es *globalmente óptimo* con respecto a un criterio  $K$  a condición de que  $\alpha(\mathcal{T}) \geq \alpha(\tilde{\mathcal{T}})$  (o  $\leq$ ) para cada triangulación  $\tilde{\mathcal{T}}$  de  $\mathcal{P}$ .

Una triangulación globalmente óptima  $\mathcal{T}$  es también localmente óptima, y de hecho es única hasta casos neutrales donde modificar la triangulación no cambia  $\alpha(\mathcal{T})$ . Sin embargo, se debe observar que el criterio del ángulo max-min es el único criterio conocido para el cual un óptimo local es también un óptimo global en el sentido de la definición 2.3.7.

La triangulación asociada con el criterio del ángulo max-min es una *triangulación Delaunay* de  $\mathcal{P}$ . Esto se basa en el hecho de que, dado un conjunto de puntos  $\mathcal{P} = \{\mathbf{P}_i\}$ , la *teselación Voronoi* (también denominada la *teselación Dirichlet* o *Thiessen*) está definida como la partición de  $\mathbb{R}^2$  en regiones de Voronoi

$$\mathbf{F}_i = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : d(\mathbf{x}, \mathbf{P}_i) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{P}_j) \text{ para todo } j \neq i\}.$$

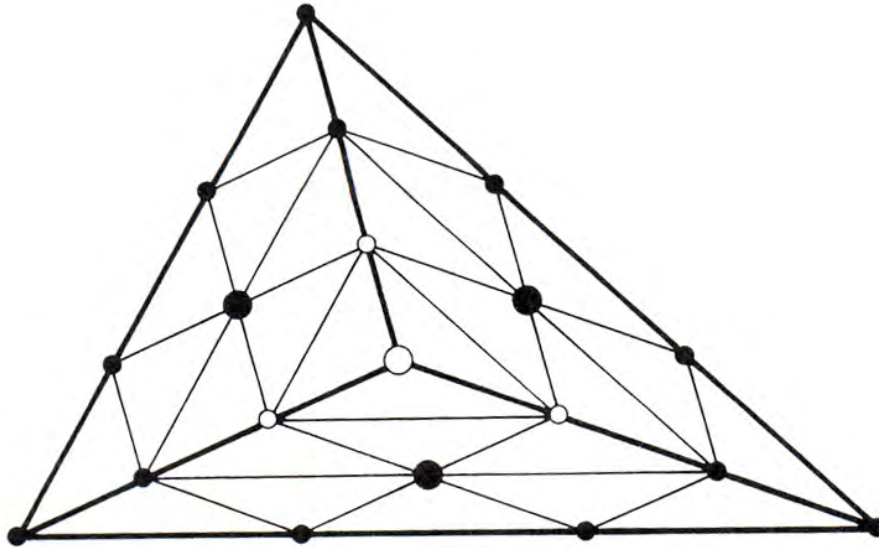
Aquí  $d(\mathbf{x}, \mathbf{P}_k)$  es la distancia euclídeana, i.e.,  $\mathbf{F}_i$  es polígono que consiste de todos los puntos  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  los cuales están más cercanos a  $\mathbf{P}_i$  que a cualquier otro  $\mathbf{P}_j$  con  $j \neq i$ .

## Interpolantes Triangulares

### Interpolante de Clough-Tocher

Para construir un interpolante cúbico de Clough-Tocher con continuidad  $C^1$  se divide cada triángulo en tres micro elementos conectando sus vértices a un punto ubicado en su interior (usualmente se toma el centro de gravedad del triángulo para lograr simetría). Para cada vértice de la triangulación se asigna datos  $C^1$ , i.e., el valor de la función y sus dos primeras derivadas,

junto con la derivada en el cruce de la frontera en el centro de cada arista de la triangulación. Las direcciones usualmente se escogen para que sean perpendiculares a las aristas, en cuyo caso se les denomina derivadas normales de cruce de frontera. Esto da un total de 12 datos por macro elemento, los cuales son utilizados para construir un interpolante cúbico a trozos global con continuidad  $C^1$ . Las ordenadas de Bezier para cada micro elemento son determinadas de manera única por los datos dados y las condiciones de continuidad  $C^1$  en un proceso de cuatro pasos (ver Figura 2.5).



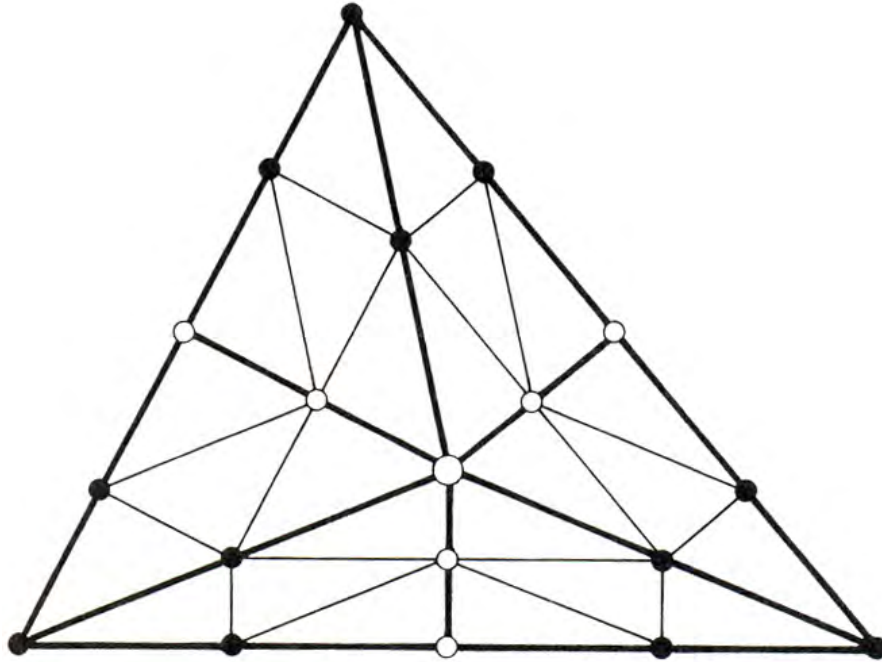
**Figura 2.5:** Interpolante de Clough-Tocher

Es importante observar que el interpolante de Clough-Tocher cúbico de continuidad  $C^1$  en el centro de cada macro elemento posee realmente continuidad  $C^2$ . Si no se tienen las derivadas de cruce de frontera en los centros de cada arista de la triangulación, todavía se puede definir un interpolante realizando una condensación de los parámetros: para cada arista del macro triángulo, las derivadas de cruce de frontera pueden ser estimadas a partir de sus puntos extremos. El punto medio de la derivada de cruce de frontera se le asigna el valor promedio de estos valores [10].

### Interpolante de Powell-Sabin

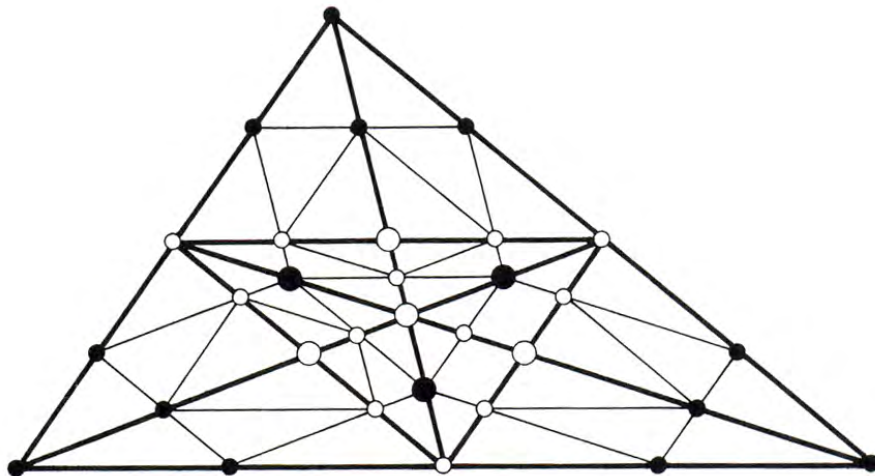
El interpolante de Powell-Sabin se genera a partir de datos de continuidad  $C^1$  en los vértices de una triangulación, construyendo un interpolante cuadrático por trozos global con continuidad  $C^1$ . Para poder trabajar con polinomios cuadráticos, se debe utilizar un mayor número de micro elementos. Si el ángulo interior más grande de un triángulo dado es más pequeño que 75 grados (un valor seleccionado de forma heurística) entonces lo dividimos en seis micro elementos; en otro caso es dividido en doce micro elementos. En el primer caso, esto se logra conectando los vértices y los puntos medios de las caras con un punto que yace en el interior del triángulo. En el segundo caso, se requiere subdividir de manera adicional el triángulo conectando los puntos medios de las caras unas a otras. La razón para dividir en estos dos casos

es que el centro del círculo circunscrito de un triángulo dado puede encontrarse afuera o muy cercano a una de las caras del triángulo, lo cual puede generar triángulos delgados y largos. Alternativamente, se puede utilizar el centro del triángulo inscrito, lo que evita la necesidad de considerar los dos casos.



**Figura 2.6:** Interpolante de Powell-Sabin dividido en seis micro elementos

Las ordenadas de Bézier del polinomio de Bézier cuadrático asociado con cada micro elemento pueden ser determinadas por un proceso de tres o cuatro pasos a partir de los datos utilizando las condiciones de continuidad  $C^1$ , ver las Figuras 2.6 y 2.7. En este caso es importante observar el hecho de que las derivadas de cruce de frontera normales a lo largo de cada arista de los triángulos son lineales en lugar de lineales a trozos.



**Figura 2.7:** Interpolante de Powell-Sabin dividido en doce micro elementos

# Capítulo 3

## Experimentación Numérica

Los conceptos desarrollados en el Capítulo 2 permiten implementar un conjunto de algoritmos para la interpolación de superficies. Estos algoritmos permiten estudiar diversos tipos de capas que suelen encontrarse dentro del problema de trazado de rayos sísmicos.

En este capítulo se presentan, por medio de tablas y gráficos, los resultados obtenidos al evaluar los diversos algoritmos de interpolación de datos *scattered* sobre algunos modelos sintéticos. Se efectuaron diversas pruebas que consideran distintos escenarios de superficies encontrados en los problemas de trazado de rayos. Es importante destacar que el análisis de los resultados no está basado únicamente en la parte numérica. También el aspecto visual representa una poderosa herramienta para entender y evaluar los resultados arrojados por los diferentes algoritmos.

### 3.1. Pruebas Realizadas

Para validar los algoritmos de interpolación implementados se realizó dos tipos de pruebas:

1. Superficies reportadas en la bibliografía
2. Superficies conocidas como problemáticas en el trazado de rayos sísmicos

El grupo de superficies 1 sirvió como validador para comparar los algoritmos con los resultados presentados en diversos artículos del área en estudio. El siguiente grupo de pruebas (2) se utilizó sobre superficies que permitan evaluar las potencialidades de los algoritmos sobre escenarios probables encontrados en la Geofísica - superficies que poseen dificultades para su reconstrucción.

En la Tabla 3.1 se presenta un resumen del tipo de interfaces utilizadas.

A continuación mostramos en detalle la descripción de cada modelo de prueba utilizado, así como los resultados obtenidos en cada caso.

Modelo de Superficie	Características Adicionales
Función Peaks	
Función Franke	
Modelo 1 de Capa	Capa plana inclinada
Modelo 2 de Capa	Capa que simula un pliegue
Modelo 3 de Capa	Capa con dos elevaciones
Modelo 4 de Capa	Capa que simula un Domo de Sal

**Tabla 3.1:** Resumen de pruebas realizadas

### 3.1.1. Pruebas con Funciones Reportadas en la Bibliografía

Las dos pruebas realizadas en esta parte se llevaron a cabo considerando distribuciones de puntos de tres (3) maneras:

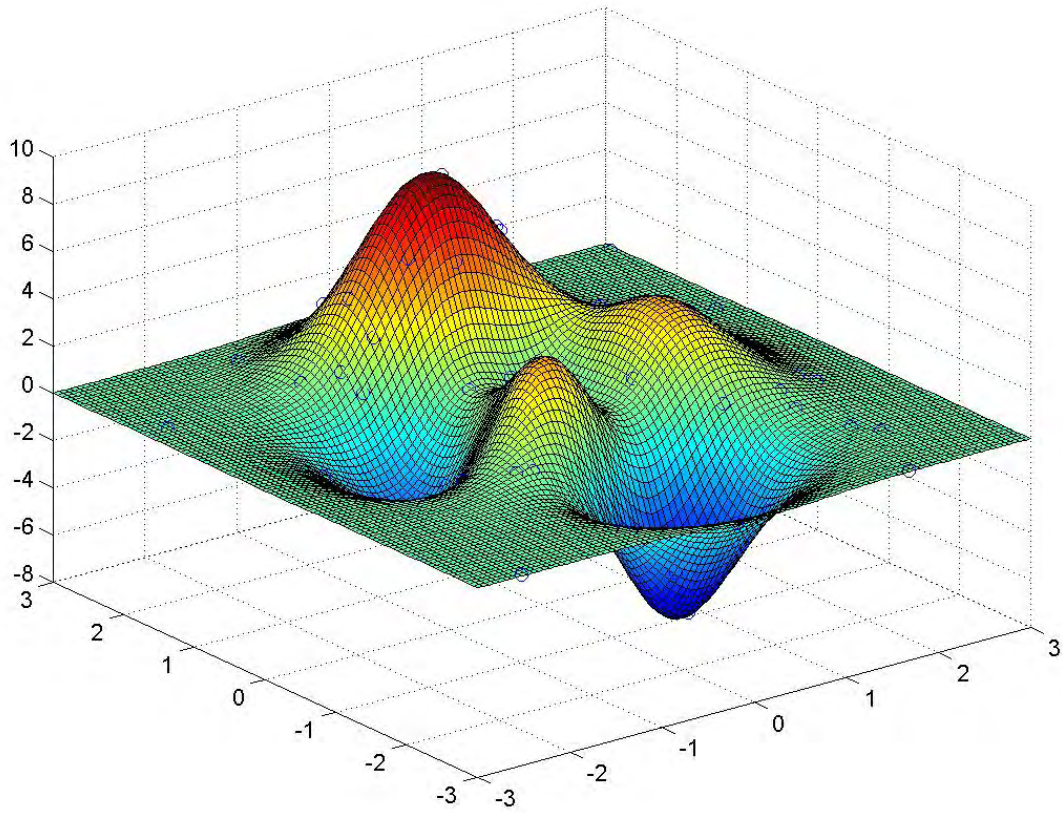
- Conjunto de 50 puntos uniformemente distribuidos.
- Conjunto de 50 puntos ubicados sobre líneas.
- Conjunto de 50 puntos agrupados en zonas del dominio.

A cada uno de estos conjuntos de puntos se le aplicó los métodos desarrollados. En las tablas que se presentan a continuación, cada columna corresponde a una de las anteriores categorías, y es denotado de la siguiente manera: *U.D.* para el conjunto de 50 puntos uniformemente distribuidos, *Líneas* para el conjunto de 50 puntos ubicados sobre líneas y *Agrupados* para el conjunto de 50 puntos agrupados en zonas del dominio.

#### Primer modelo de validación: Función *Peaks*

*Peaks* es una función de dos variables obtenida por medio de translación y escalamiento de distribuciones gaussianas. Esta definida por la ecuación

$$f(x, y) = 3*(1-x)^2*exp(-(x^2)-(y+1)^2) - 10*(x/5-x^3-y^5)*exp(-x^2-y^2) - 1/3*exp(-(x+1)^2-y^2) \quad (3.1)$$



**Figura 3.1:** Gráfica original de la Función Peaks

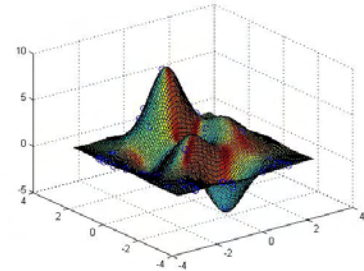
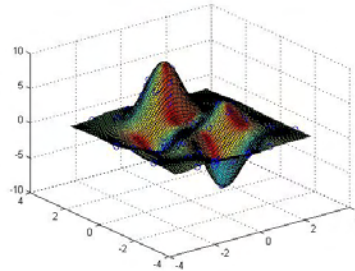
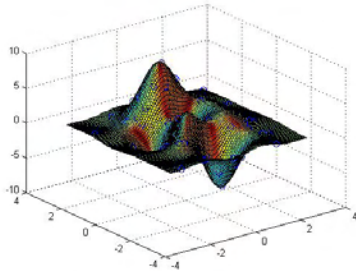
La gráfica de la función *Peaks* aparece representada en la Figura 3.1, donde también se muestran los puntos de datos originales.



Método	Métrica	<i>U.D.</i>	<i>Líneas</i>	<i>Agrupados</i>
SHEPARD	CPU	0.210302	0.260374	0.240346
	$L_2$	94.5107	69.7680	148.898
	$L_\infty$	3.96802	4.19414	6.231
TPS	CPU	0.230331	0.260374	0.230331
	$L_2$	44.4094	80.6088	99.5845
	$L_\infty$	2.57369	5.31186	4.097
GAU	CPU	0.320461	0.220317	0.220317
	$L_2$	29.7712	56.0671	65.2832
	$L_\infty$	1.54296	3.74974	3.05223
MQU	CPU	0.260374	0.150216	0.220317
	$L_2$	29.1901	65.5945	89.0443
	$L_\infty$	1.50032	4.31172	3.21215
IMQ	CPU	0.200288	0.260374	0.370533
	$L_2$	30.3685	64.5672	86.3195
	$L_\infty$	1.8116	4.50592	3.99577
WEN	CPU	0.480691	0.400576	0.440634
	$L_2$	90.9209	101.023	134.295
	$L_\infty$	4.49892	3.98689	6.33527
TRI1	CPU	0.470677	0.400576	0.400576
	$L_2$	49.6701	83.6771	108.797
	$L_\infty$	2.92164	5.40293	4.47607
TRI2	CPU	0.0701008	0.0701008	0.0701008
	$L_2$	51.7874	91.848	105.531
	$L_\infty$	3.05738	5.4146	6.03355

**Tabla 3.2:** Resultados obtenidos con el primer modelo de prueba: Función *Peaks*

Esta superficie presenta características interesantes para comparar los métodos de interpolación, ya que tiene tres (3) picos y dos (2) depresiones. En la Tabla 3.2 se pueden apreciar los resultados obtenidos al aplicar los distintos métodos. Para cada distribución de puntos se muestran los valores obtenidos de tiempo de CPU, error en norma  $L_2$  y error en norma  $L_\infty$ .



**Figura 3.2:** Función Peaks - 50UD **Figura 3.3:** Función Peaks - 50LI **Figura 3.4:** Función Peaks - 50CL  
- GAU

Con base en los valores que aparecen en la Tabla 3.2 se determinó que, para esta superficie el método que obtiene mejores resultados en cuanto a minimización del error con respecto a la superficie original y apariencia visual fue el de base radial que utiliza como función base la Gaussiana.

### Segundo modelo de validación: Función *Franke*

*Franke* es una función de dos variables definida como:

$$f(x, y) = 0,75 \exp\left(-\frac{(9x - 2)^2 + (9y - 2)^2}{4}\right) + 0,75 \exp\left(-\left(\frac{(9x + 1)^2}{49} - \frac{9y + 1}{10}\right)\right) + 0,5 \exp\left(-\frac{(9x - 7)^2 + (9y - 3)^2}{4}\right) - 0,2 \exp\left(-\frac{(9x - 4)^2 + (9y - 7)^2}{4}\right).$$

La gráfica de la función *Franke* aparece representada en la Figura 3.5, donde también se muestran los puntos de datos originales.

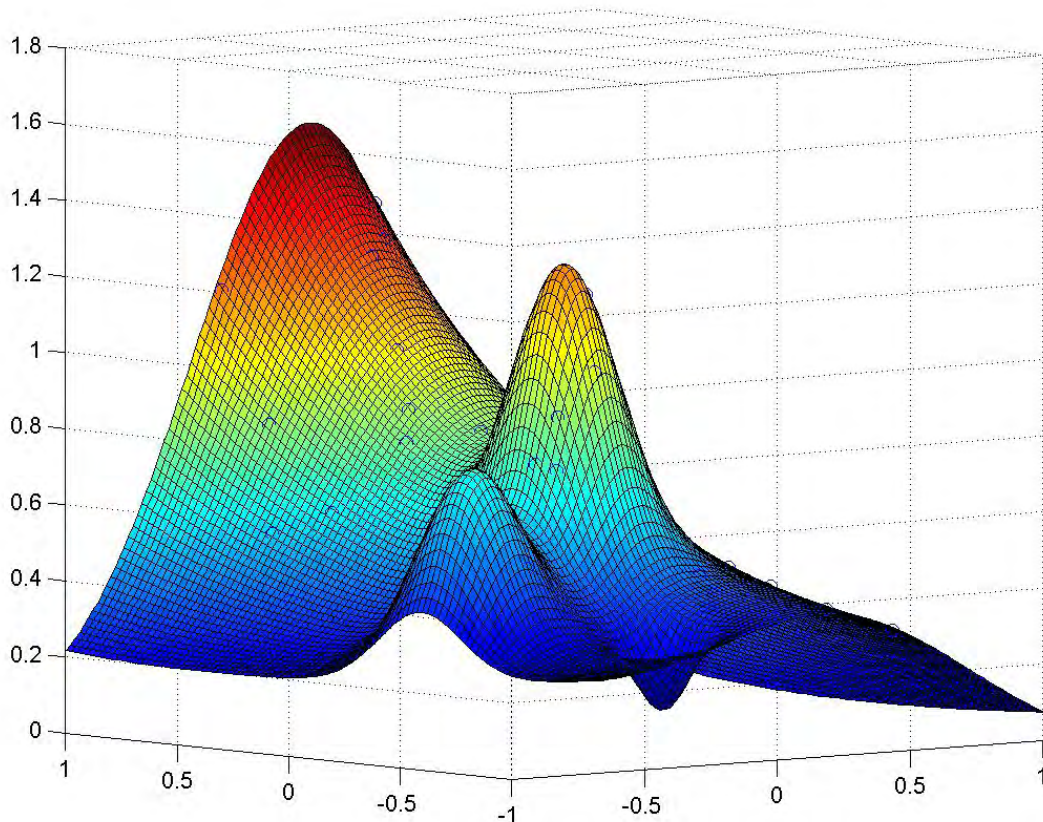


Figura 3.5: Gráfica original de la Función Franke

Esta superficie es utilizada extensamente en la bibliografía consultada. En la Tabla 3.3 se pueden apreciar los resultados obtenidos al aplicar los distintos métodos. Para cada distribución de puntos se muestran los valores obtenidos de tiempo de CPU, error en norma  $L_2$  y error en norma  $L_\infty$ .

Con base en los valores que aparecen en la Tabla 3.3 se determinó que, para esta superficie el método que obtiene mejores resultados en cuanto a minimización del error con respecto a la superficie original y apariencia visual utilizando la distribución de puntos uniformemente distribuida (Figura 3.6) y con puntos agrupados (Figura 3.8) es TPS. Para las distribuciones de puntos sobre líneas (Figura 3.7) es WEN.

Método	Métrica	<i>U.D.</i>	<i>Líneas</i>	<i>Agrupados</i>
SHEPARD	CPU	0.240346	0.220317	0.240346
	$L_2$	14.2265	15.3792	25.2832
	$L_\infty$	0.654363	0.46544	0.94194
TPS	CPU	0.640922	0.350504	0.530763
	$L_2$	4.5794	5.18308	10.7734
	$L_\infty$	0.279558	0.235644	0.438002
GAU	CPU	0.540778	0.210302	0.260374
	$L_2$	129.089	547.061	199.59
	$L_\infty$	11.5133	56.3238	27.9413
MQU	CPU	0.520749	0.16023	0.260374
	$L_2$	8.53658	17.0698	16.5261
	$L_\infty$	0.401514	0.867891	1.06948
IMQ	CPU	0.540778	0.220317	0.490706
	$L_2$	7.38715	12.7259	14.491
	$L_\infty$	0.337419	0.737014	0.729923
WEN	CPU	0.701008	0.400576	0.440634
	$L_2$	5.40723	4.54887	21.799
	$L_\infty$	0.374939	0.187793	1.24191
TRI1	CPU	0.550792	0.350504	0.350504
	$L_2$	4.80122	5.25355	12.2884
	$L_\infty$	0.285846	0.276553	0.550221
TRI2	CPU	0.0300432	0.0300432	0.0400576
	$L_2$	18.514	17.6595	44.374
	$L_\infty$	1.66894	1.66894	1.66894

**Tabla 3.3:** Resultados obtenidos con el segundo modelo de prueba: Función *Franke*

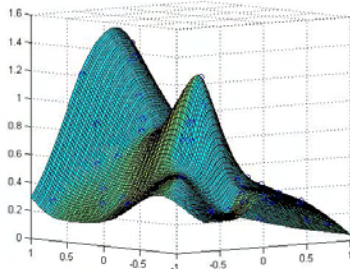


Figura 3.6: Función Franke - 50UD - TPS

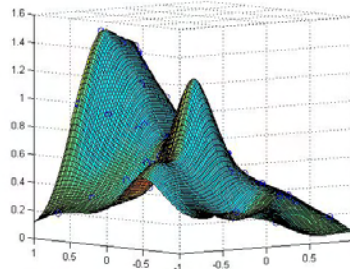


Figura 3.7: Función Franke - 50LI - WEN

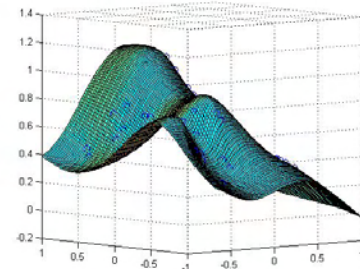


Figura 3.8: Función Franke - 50CL - TPS

### 3.1.2. Pruebas con Modelos de Capa con Dificultades de Modelado en el Trazado de Rayos

Las funciones utilizadas en la experimentación se escogieron por representar casos de interés en la aproximación de superficies en geofísica. En particular son:

1.  $f(x, y) = \frac{3}{20}x + 3$
2.  $f(x, y) = \frac{\tanh(2y-2x)+10}{19}$
3.  $f(x, y) = \frac{1,25+\cos(5,4y)}{6+6(3x-1)^2}$
4.  $f(x, y) = \exp(-5,0625((x - 0,5)^2 + (y - 0,25)^2))$

#### Modelo 1

*Modelo 1* es una función que presenta una capa inclinada. La gráfica de la función  $f(x, y) = \frac{3}{20}x + 3$  aparece representada en la Figura 3.9, donde también se muestran los puntos de datos originales.

En la Tabla 3.4 se pueden apreciar los resultados obtenidos al aplicar los distintos métodos. Para cada distribución de puntos se muestran los valores obtenidos de tiempo de CPU, error en norma  $L_2$  y error en norma  $L_\infty$ .

Con base en los valores que aparecen en la Tabla 3.4 se determinó que, para esta superficie el método que obtiene mejores resultados en cuanto a minimización del error con respecto a la superficie original y apariencia visual utilizando las tres distribuciones de puntos: puntos uniformemente distribuidos (Figura 3.10), sobre líneas (Figura 3.11) y agrupados (Figura 3.12) es TPS.

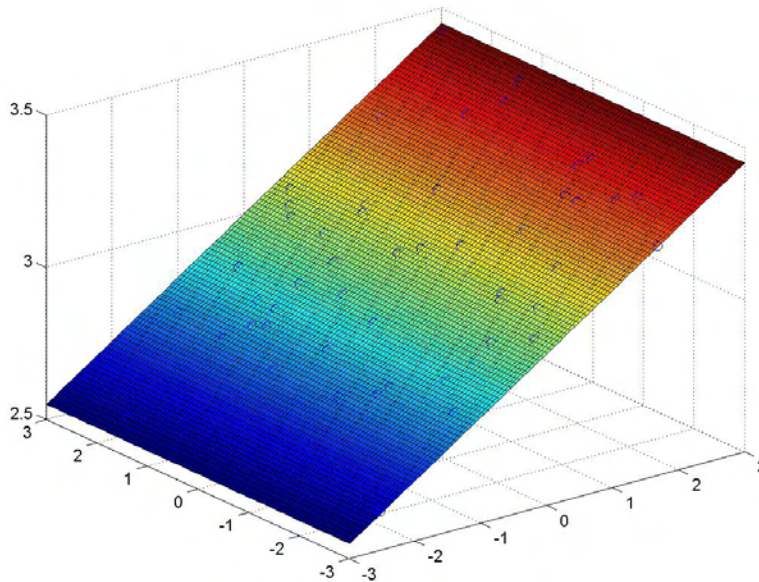
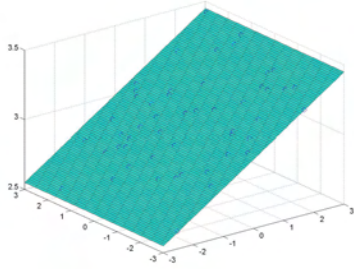


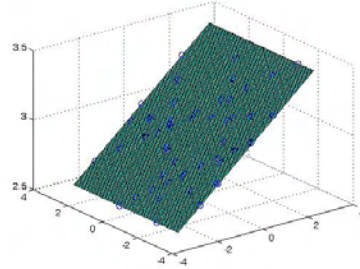
Figura 3.9: Gráfica de la función Modelo 1

Método	Métrica	<i>U.D.</i>	<i>Líneas</i>	<i>Agrupados</i>
SHEPARD	CPU	0.230331	0.21875	0.203125
	$L_2$	12.0154	1458.47	12.8604
	$L_\infty$	0.352842	0.372406	0.415653
TPS	CPU	0.200288	0.15625	0.125
	$L_2$	5.77948e-014	4.34459e-014	1.21603e-013
	$L_\infty$	1.77636e-015	1.33227e-015	5.77316e-015
GAU	CPU	0.330475	0.390625	0.265625
	$L_2$	59.4094	68.2773	98.4656
	$L_\infty$	2.51363	2.91761	3.37356
MQU	CPU	0.220317	0.109375	0.171875
	$L_2$	0.736179	0.661893	2.03342
	$L_\infty$	0.0554437	0.0591315	0.130081
IMQ	CPU	0.190274	0.296875	0.34375
	$L_2$	10.8432	12.3852	32.1491
	$L_\infty$	0.833356	0.889994	1.50519
WEN	CPU	0.25036	0.484375	0.4375
	$L_2$	205.645	207.537	238.455
	$L_\infty$	3.45	3.4512	3.45
TRI1	CPU	0.50072	0.203125	0.350504
	$L_2$	0.576307	0.498361	12.2884
	$L_\infty$	0.0400242	0.0397781	0.550221
TRI2	CPU	0.050072	0.1875	0.0400576
	$L_2$	147.732	133.293	44.374
	$L_\infty$	3.45	3.4512	1.66894

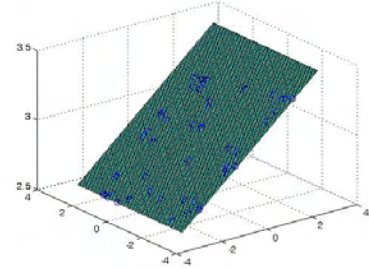
Tabla 3.4: Resultados obtenidos con el primer modelo de prueba: Capa inclinada



**Figura 3.10:** Modelo 1 - 50UD - TPS



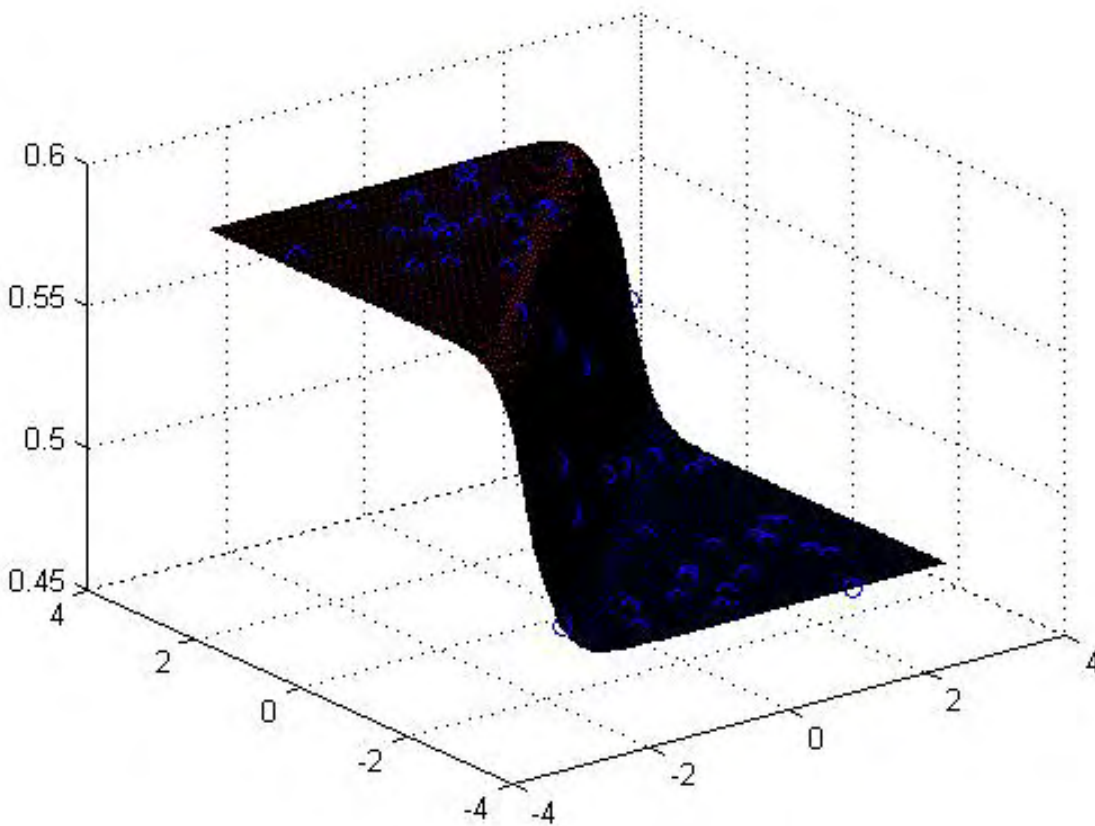
**Figura 3.11:** Modelo 1 - 50LI - TPS



**Figura 3.12:** Modelo 1 - 50CL - TPS

## Modelo 2

*Modelo 2* es una función que presenta una superficie con pliegue. La gráfica de la función  $f(x, y) = \frac{\tanh(2y-2x)+10}{19}$  aparece representada en la Figura 3.13, donde también se muestran los puntos de datos originales.



**Figura 3.13:** Gráfica de la función Modelo 2

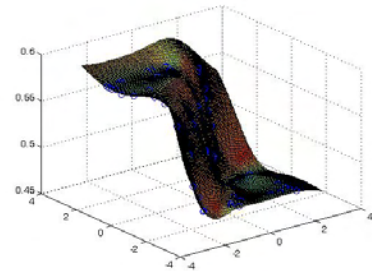
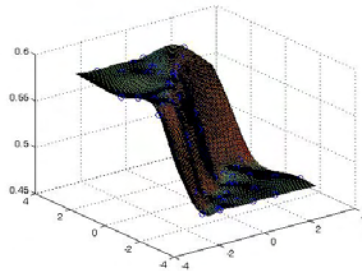
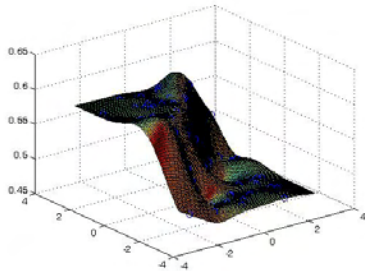
En la Tabla 3.5 se pueden apreciar los resultados obtenidos al aplicar los distintos métodos. Para cada distribución de puntos se muestran los valores obtenidos de tiempo de CPU, error en norma  $L_2$  y error en norma  $L_\infty$ .



Con base en los valores que aparecen en la Tabla 3.4 se determinó que, para esta superficie el método que obtiene mejores resultados en cuanto a minimización del error con respecto a la superficie original y apariencia visual utilizando las distribuciones de puntos uniformemente distribuidas (Figura 3.14) y sobre líneas (Figura 3.15) es MQU. Para las distribuciones de puntos agrupados (Figura 3.16) es TPS.

Método	Métrica	<i>U.D.</i>	<i>Líneas</i>	<i>Agrupados</i>
SHEPARD	CPU	0.234375	0.234375	0.1875
	$L_2$	1.90023	nan	2.48335
	$L_\infty$	0.0603748	0.0575207	0.0601323
TPS	CPU	0.171875	0.243357	0.09375
	$L_2$	0.88174	0.976858	0.873492
	$L_\infty$	0.0549439	0.0510062	0.0430222
GAU	CPU	0.46875	0.4375	0.3125
	$L_2$	11.8358	11.485	15.5301
	$L_\infty$	0.513864	0.439256	0.522024
MQU	CPU	0.15625	0.109375	0.15625
	$L_2$	0.75151	0.924078	1.064
	$L_\infty$	0.0466768	0.0527574	0.041291
IMQ	CPU	0.59375	0.421875	0.265625
	$L_2$	2.67177	1.55394	4.32728
	$L_\infty$	0.137409	0.0955627	0.202797
WEN	CPU	0.5	0.46875	0.47658
	$L_2$	36.3095	36.0356	40.7576
	$L_\infty$	0.578947	0.578947	0.578947
TRI1	CPU	0.1875	0.296875	0.350504
	$L_2$	1.01827	1.02544	12.2884
	$L_\infty$	0.0585991	0.0525408	0.550221
TRI2	CPU	0.0625	0.015625	0.0400576
	$L_2$	26.1564	21.9723	44.374
	$L_\infty$	0.578947	0.578947	1.66894

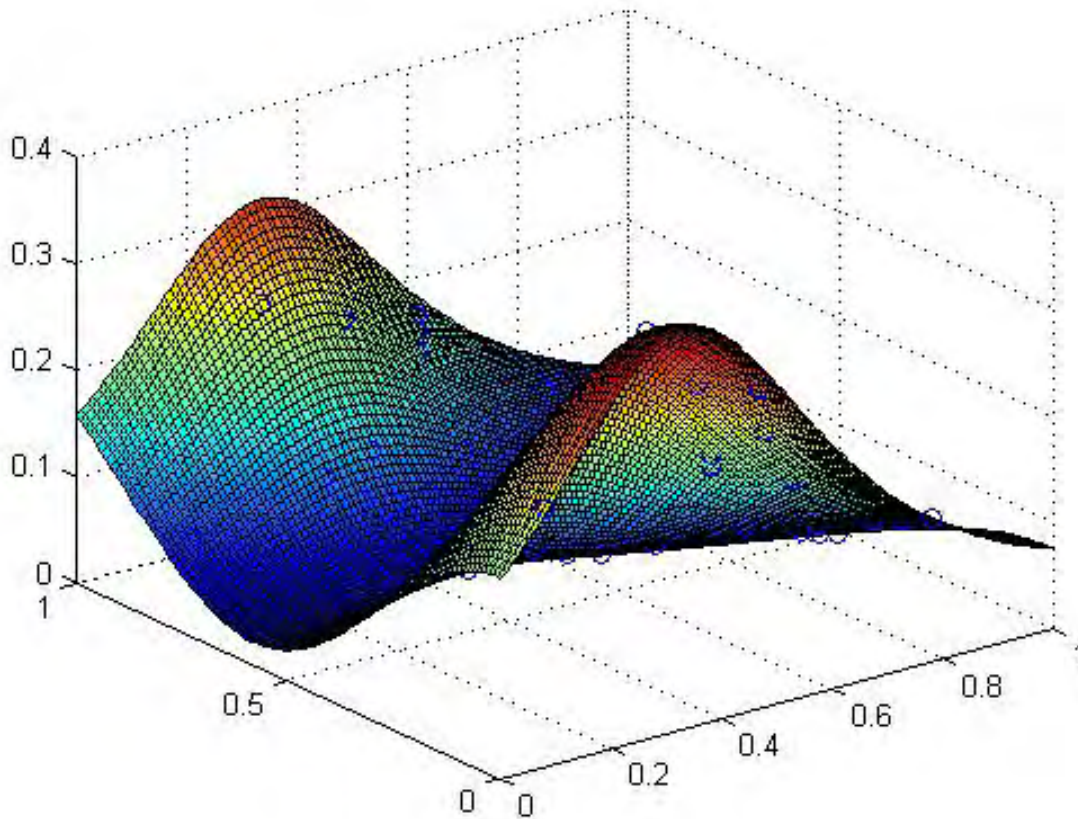
**Tabla 3.5:** Resultados obtenidos con el segundo modelo de prueba: Capa en forma de pliegue



**Figura 3.14:** Modelo 2 - 50UD - **Figura 3.15:** Modelo 2 - 50LI - **Figura 3.16:** Modelo 2 - 50CL -  
MQU MQU TPS

### Modelo 3

*Modelo 3* es una función que representa una superficie con dos elevaciones y una depresión prolongada. La gráfica de la función  $f(x, y) = \frac{1,25 + \cos(5,4y)}{6 + 6(3x-1)^2}$  aparece representada en la Figura 3.17, donde también se muestran los puntos de datos originales.



**Figura 3.17:** Gráfica de la función Modelo 3

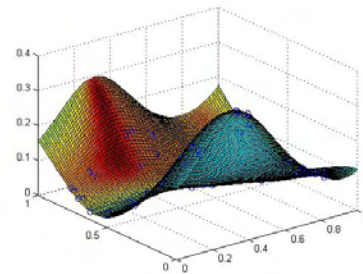
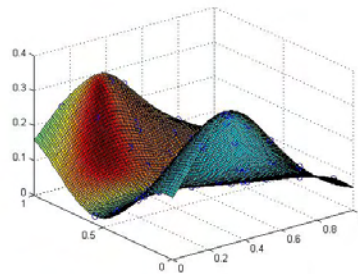
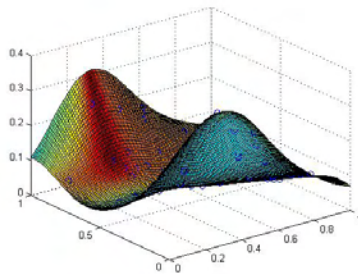
En la Tabla 3.6 se pueden apreciar los resultados obtenidos al aplicar los distintos métodos. Para cada distribución de puntos se muestran los valores obtenidos de tiempo de CPU, error en norma  $L_2$  y error en norma  $L_\infty$ .

Con base en los valores que aparecen en la Tabla 3.6 se determinó que, para esta superficie el método que obtiene mejores resultados en cuanto a minimización del error con respecto a la superficie original y apariencia visual utilizando la distribución de puntos uniformemente distribuida (Figura 3.18) y con puntos agrupados (Figura 3.20) es IMQ. Para las distribuciones de puntos sobre líneas (Figura 3.19) es WEN.



Método	Métrica	<i>U.D.</i>	<i>Líneas</i>	<i>Agrupados</i>
SHEPARD	CPU	0.230331	0.240346	0.230331
	$L_2$	3.90924	542.1011	4.75596
	$L_\infty$	0.165965	0.124624	0.203306
TPS	CPU	0.230331	0.280403	0.170245
	$L_2$	0.479469	0.638737	1.25043
	$L_\infty$	0.0344814	0.0396732	0.0898723
GAU	CPU	0.180259	0.130187	0.25036
	$L_2$	2.38221	2.82624	9.90508
	$L_\infty$	0.331895	0.220456	1.22287
MQU	CPU	0.330475	0.280403	0.380547
	$L_2$	0.561232	1.16467	1.86906
	$L_\infty$	0.0677124	0.0634562	0.199484
IMQ	CPU	0.460662	0.460662	0.470677
	$L_2$	0.448015	0.949483	1.13786
	$L_\infty$	0.0493889	0.047437	0.112855
WEN	CPU	0.711022	0.791138	0.711022
	$L_2$	0.512821	0.39103	1.61502
	$L_\infty$	0.0425382	0.0195694	0.110337
TRI1	CPU	0.59085	0.600864	0.350504
	$L_2$	0.86847	0.844454	12.2884
	$L_\infty$	0.051376	0.0443067	0.550221
TRI2	CPU	0.0801152	0.0600864	0.0600864
	$L_2$	7.34541	5.25258	8.83225
	$L_\infty$	0.374963	0.374963	0.374963

**Tabla 3.6:** Resultados obtenidos con el tercer modelo de prueba: Superficie con dos elevaciones y una depresión prolongada



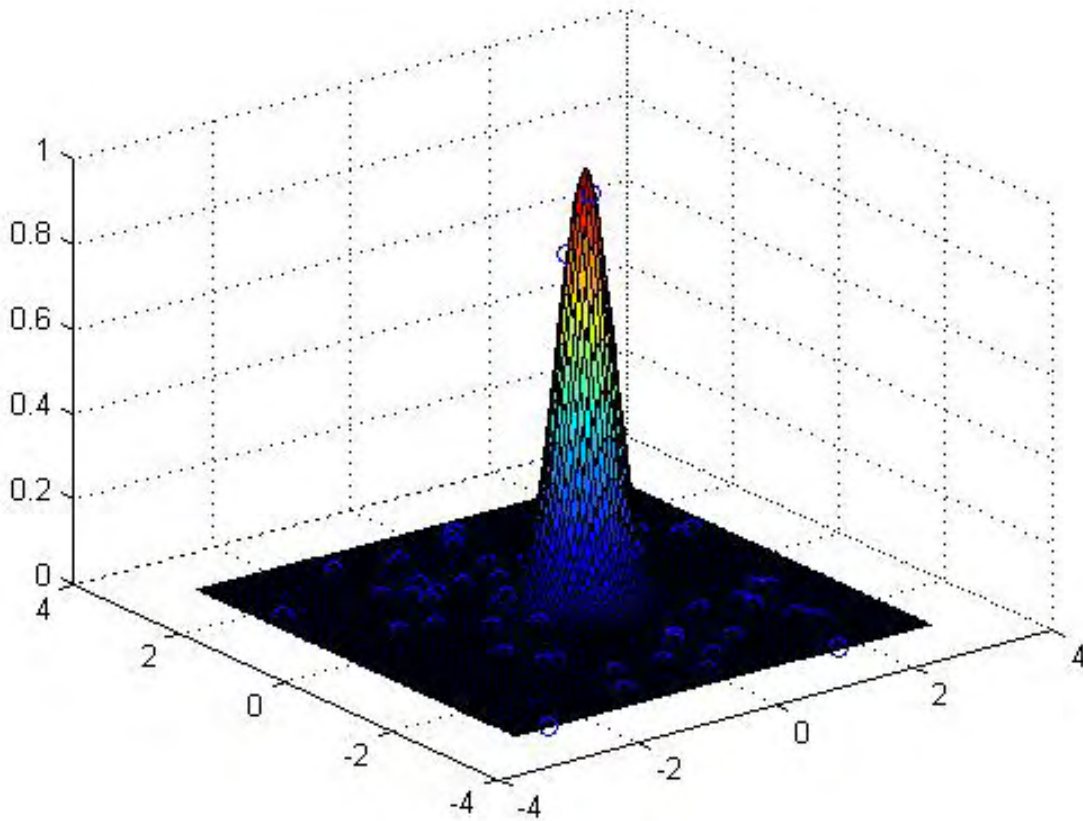
**Figura 3.18:** Modelo 3 - 50UD - **Figura 3.19:** Modelo 3 - 50LI - **Figura 3.20:** Modelo 3 - 50CL - IMQ

## Modelo 4

*Modelo 4* es una función que representa una aproximación a un domo de sal, estructura muy común en la Geofísica. La gráfica de la función

$$f(x, y) = \exp(-5,0625((x - 0,5)^2 + (y - 0,25)^2))$$

aparece representada en la Figura 3.21, donde también se muestran los puntos de datos originales.



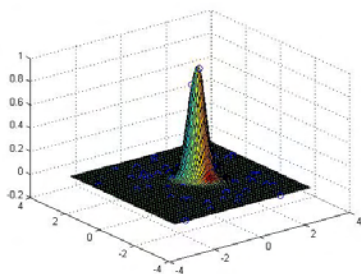
**Figura 3.21:** Gráfica de la función Modelo 4

En la Tabla 3.7 se pueden apreciar los resultados obtenidos al aplicar los distintos métodos. Para cada distribución de puntos se muestran los valores obtenidos de tiempo de CPU, error en norma  $L_2$  y error en norma  $L_\infty$ .

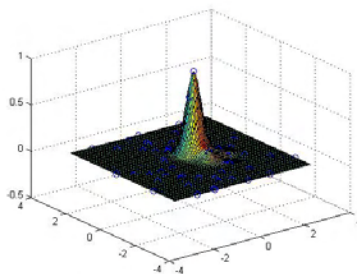
Con base en los valores que aparecen en la Tabla 3.7 se determinó que, para esta superficie el método que obtiene mejores resultados en cuanto a minimización del error con respecto a la superficie original y apariencia visual utilizando las tres distribuciones de puntos: puntos uniformemente distribuidos (Figura 3.22), sobre líneas (Figura 3.23) y agrupados (Figura 3.24) es WEN.

Método	Métrica	<i>U.D.</i>	<i>Líneas</i>	<i>Agrupados</i>
SHEPARD	CPU	0.260374	0.230331	0.240346
	$L_2$	3.59669	9.6112	6.55266
	$L_\infty$	0.314908	0.500807	0.529562
TPS	CPU	0.16023	0.170245	0.170245
	$L_2$	3.86613	8.15937	8.62317
	$L_\infty$	0.265342	0.508895	0.437003
GAU	CPU	0.130187	0.130187	0.120173
	$L_2$	8.09541	11.403	18.0395
	$L_\infty$	0.398775	0.825176	1.02831
MQU	CPU	0.150216	0.140202	0.200288
	$L_2$	5.24435	12.1079	15.2983
	$L_\infty$	0.287224	0.805237	0.787132
IMQ	CPU	0.210302	0.240346	0.270389
	$L_2$	4.27996	9.32855	8.37675
	$L_\infty$	0.291856	0.666202	0.618813
WEN	CPU	0.41059	0.41059	0.330475
	$L_2$	1.73655	3.64354	2.88544
	$L_\infty$	0.220549	0.43685	0.349508
TRI1	CPU	0.320461	0.34049	0.350504
	$L_2$	3.73992	6.98809	12.2884
	$L_\infty$	0.247142	0.415797	0.550221
TRI2	CPU	0.0801152	0.0600864	0.0600864
	$L_2$	3.82154	7.28113	5.57168
	$L_\infty$	0.349733	0.498511	0.482443

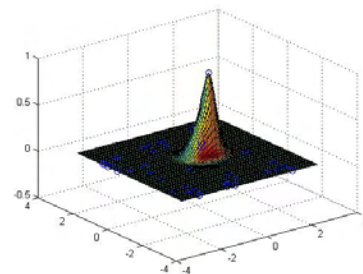
**Tabla 3.7:** Resultados obtenidos con el cuarto modelo de prueba: Domo de sal



**Figura 3.22:** Modelo 4 - 50UD - WEN



**Figura 3.23:** Modelo 4 - 50LI - WEN



**Figura 3.24:** Modelo 4 - 50CL - WEN

# Capítulo 4

## Conclusiones

El objetivo de este informe es comparar diversos métodos de interpolación de datos *scattered* que realicen aproximaciones de superficies útiles para el área de geofísica computacional, con el interés de aproximar lo mejor posible las superficies interfases que separan distintas capas del suelo no teniendo conocimiento a priori acerca de la distribución de los puntos que definen dichas superficies interfases.

Se realizó un estudio de diversas técnicas de interpolación de datos *scattered* que generan una aproximación suave de superficies. En este sentido, se implementaron los métodos basados en Shepard, funciones de base radial y basados en triangulación.

Se realizaron diversos experimentos tanto con los modelos de prueba de superficies reportados en la literatura, como con modelos tipo que son de interés para el trazado de rayos sísmicos.

Los métodos basados en funciones de base radial se comportaron de manera adecuada en casi todas las pruebas realizadas. Es necesario estudiar su comportamiento dentro de un trazador de rayos, ya que en la literatura están reportados posibles problemas con el número de condición de la matriz asociada al método.

Los tiempos de ejecución obtenidos son mejores cuando se utilizan métodos basados en triangulación.

Dado que las técnicas presentadas en este reporte poseen menos parámetros a modificar, su empleo dentro de algoritmos de inversión sísmica que utilicen trazado de rayos puede ser de gran utilidad, dado que disminuyen el número de parámetros a optimizar.

# Bibliografía

- [1] J. Hoschek and D. Lasser, *Fundamentals of Computer Aided Geometric Design*, 1st ed., A K Peters Ltd. USA, Wellesley, MA, 1993.
- [2] R. J. Renka and R. Brown, *Algorithm 792: Accuracy Tests of ACM Algorithms for Interpolation of Scattered Data in the Plane*, ACM Trans. Math. Software **25/01** (Mar. 1999), 78–94.
- [3] D. Shepard, *A Two Dimensional Interpolation Function for Irregular Spaced Data*, Proceedings 23rd ACM National Conference (1968), 517–524.
- [4] P. Alfeld, *Scattered Data Interpolation in Three or More Variables*, Mathematical Methods in Computer Aided Geometric Design, 1989, pp. 1–33.
- [5] I. Amidror, *Scattered Data Interpolation Methods for Electronic Imaging Systems: A Survey*, Journal of Electronic Imaging **11/02** (2002), 157–176.
- [6] R. E. Barnhill and G. M. Nielson, *Introduction to Surfaces*, Rocky Mountain Journal of Mathematics (1984), 1–4.
- [7] P. J. Davis, *Interpolation & Approximation*, 1st ed., Dover Publications, Inc., New York, NY, USA, 1975.
- [8] N. Dyn, *Interpolation of Scattered Data by Radial Functions*, Topics in Multivariate Approximation, 1987, pp. 47–61.
- [9] N. Dyn, *Interpolation and Approximation by Radial and Related Functions*, Approximation Theory VI, 1989, pp. 211–234.
- [10] G. Farin, *Curves and Surfaces for CAGD: A Practical Guide*, 5th ed., Morgan Kaufmann, New York, NY, USA, 2002.
- [11] T. Frank, A. L. Tertois, and J. L. Mallet, *3D-Reconstruction of Complex Geological Interfaces from Irregularly Distributed and Noisy Point Data*, Computer Geosciences **33** (2007), 932–943.
- [12] R. Franke and G. M. Nielson, *Scattered Data Interpolation of Large Sets of Scattered Data*, International Journal of Numerical Methods in Engineering **15** (1980), 1691–1704.
- [13] R. Franke, *Scattered Data Interpolation: Test of Some Methods*, Mathematics of Computation **38** (1982), 181–200.
- [14] R. Franke, *Thin Plate Splines with Tension*, Surfaces in CAGD '84, 1985, pp. 87–95.
- [15] R. Franke and G. M. Nielson, *Scattered Data Interpolation and Applications: A Tutorial and Survey*, Geometric Modelling: Methods and Their Application, 1991, pp. 131–160.
- [16] J. Hoschek and D. Lasser, *Fundamentals of Computer Aided Geometric Design*, 1st ed., A K Peters Ltd., Wellesley, MA, USA, 1993.
- [17] A. Iske, *Multiresolution Methods in Scattered Data Modelling*, Springer Verlag, Berlin, Heideleberg, Alemania, 2004.
- [18] B. R. Julian and D. Gubbins, *Three-Dimensional Seismic Ray Tracing*, Journal of Geophysics **43** (1977), 95–113.

- [19] S. Lee, G. Wolberg, and S. Y. Shin, *Scattered Data Interpolation with Multilevel B-Splines*, IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics **03/03** (July 1997), 228–244.
- [20] S. K. Lodha and R. Franke, *Scattered Data Techniques for Surfaces*, Scientific Visualization Conference Dagstuhl '97 (1997), 181–222.
- [21] G. M. Nielson, *Scattered Data Modeling*, IEEE Computer Graphics and Applications **13/01** (1993), 60–70.
- [22] N. Rawlinson, S. Pozgay, and S. Fishwick, *Seismic Tomography: A Window Into Deep Earth*, Physics of the Earth and Planetary Interiors **178** (2010), 101–135.
- [23] R. J. Renka, *Algorithm 660: QSHEP2D: Quadratic Shepard Method for Bivariate Interpolation of Scattered Data*, ACM Transactions on Mathematical Software **14** (1988), 149–150.
- [24] R. J. Renka and R. Brown, *Algorithm 792: Accuracy Tests of ACM Algorithms for Interpolation of Scattered Data in the Plane*, ACM Transactions on Mathematical Software **25/01** (March 1999), 78–94.
- [25] S. Rippa, *An Algorithm for Selecting a Good Value for the Parameter  $c$  in Radial Basis Function Interpolation*, Advances in Computational Mathematics **11/02** (1999), 193–210.
- [26] D. Shepard, *A Two Dimensional Interpolation Function for Irregularly Spaced Data*, Proceedings 23rd ACM National Conference (1968), 517–524.
- [27] L. Schumaker, *Fitting Surfaces to Scattered Data*, Approximation Theory II, 1976, pp. 203–268.
- [28] L. Schumaker, *Triangulations Methods*, Topics in Multivariate Approximation, 1987, pp. 219–232.
- [29] H. Wendland, *Piecewise Polynomial Positive Definite and Compactly Supported Radial Functions of Minimal degree*, Advances in Computational Mathematics **4** (1995), 389–396.