Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Computación

Lecturas en Ciencias de la Computación
ISSN 1316-6239

Optimización de un funcional lineal sobre el conjunto de las soluciones ε-eficientes para un problema de Programación Lineal Entera Mixta con Múltiples Objetivos

Alejandro Crema y Norma Guzmán

RT 2009-04

Centro CIOMMA

Caracas, Febrero, 2009

Optimización de un funcional lineal sobre el conjunto de las soluciones ϵ-eficientes para un problema de Programación Lineal Entera Mixta con Múltiples Objetivos

Alejandro Crema y Norma Guzmán

Escuela de Computación
Facultad de Ciencias
Universidad Central de Venezuela.
alejandro.crema@ciens.ucv.ve

Febrero de 2009

1 Introducción

El problema de Programación Lineal (PL) Entera (PLE) Mixta (PLEM) con Múltiples Objetivos (PLMO, PLEMO o PLEMMO según el caso) está definido como sigue:

$$(P) \qquad \text{"}max\text{"} \;\; c^{(1)t}x, \cdots, c^{(p)t}x \quad s.a. \quad x \in X$$

donde $p \geq 2,\ J \subseteq \{1, \cdots, n\},\ X = \{x \in \Re^n : \quad Ax \leq b,\ x \geq 0,\ x_j \in Z\ ; si\ j \in J\}$ con c y b vectores y A una matriz de dimensiones apropiadas.

Supondremos que X es acotado y no vacío. Usaremos la siguiente notación: el vector $e \in \Re^p$ tiene todas sus componentes iguales a 1, C es la matriz cuyas filas son los vectores $c^{(1)t}, \cdots, c^{(p)t}$, si $(\bullet)$ es un problema de optimización entonces $F(\bullet)$ denota al conjunto de las soluciones factibles y $v(\bullet)$ al valor optimal, si existe.

Sea $x \in X$. Decimos que x es eficiente (y Cx no dominado) si y solo si: no existe $\hat{x} \in X$ con $C\hat{x} \geq Cx$ y $C\hat{x} \neq Cx$. Si $C\hat{x} \geq Cx$ decimos que $C\hat{x}$ domina a Cx o que Cx está dominado por $C\hat{x}$.

Es claro que x es eficiente (y Cx no dominado) si y solo si: si $C\hat{x} \geq Cx$ entonces $C\hat{x} = Cx$, si y solo si: no existe $\hat{x} \in X$ con $C\hat{x} \geq Cx$ y $c^{(j)t}\hat{x} > c^{(j)t}x$ para algún j.

Sea $X_E = \{x \in X :\ x \text{ es eficiente}\}$.

Los problemas de PLMO, PLEMO y PLEMMO consisten entonces en hallar X_E o al menos una buena representación de X_E. Se han desarrollado algoritmos interactivos, que incluyen la intervención del tomador de decisiones durante su ejecución y algoritmos de generación, que se ejecutan sin la intervención del tomador de decisiones ([1],[2]).

Consideremos el problema de optimizar un funcional lineal sobre el conjunto de las soluciones eficientes para los casos de PLMO o PLEMO:

$$(Q1) \ \ max \ \ d^t x \ \ s.a. \ \ x \in X_E$$

En el caso lineal ($J = \emptyset$) el problema ha sido ampliamente estudiado ([3]).

En el caso en el cual P es un problema de PLEMO, es decir con $J = \{1, \cdots, n\}$ y suponiendo, sin pérdida de generalidad, que C una matriz entera, se han desarrollado recientemente algoritmos para resolver $Q1$. En particular el trabajo que puede verse en [4] ha servido de motivación para este trabajo.

En el caso mixto general que abordaremos (P es un problema de PLEMMO) no podemos asegurar, en general, la existencia de un máximo para $d^t x$ sobre X_E. Veamos un ejemplo:

Ejemplo 1:

$$(P) \ \ "max" x_1, x_2 \ \ s.a.$$

$$x_1 \leq 2x_3 + 100(1 - x_3)$$

$$x_2 \leq x_3 + 100(1 - x_3)$$

$$x_1 + x_2 \leq 2x_4 + 100(1 - x_4)$$

$$x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \in \{0, 1\}, x_4 \in \{0, 1\}$$

Es muy fácil verificar que en este caso tenemos:

$$X_E = \{x \in \Re^4 : \ 0 \leq x_1 < 1, x_1 + x_2 = 2, x_3 = 0, x_4 = 1\} \cup \{(2, 1, 1, 0)^t\}$$

y el conjunto de las soluciones no dominadas viene dado por $\{(x_1, x_2)^t \in \Re^2 : \ 0 \leq x_1 < 1, x_1 + x_2 = 2\} \cup \{(2, 1)^t\}$

Si $d^t x = 2x_4 + x_1$ entonces no existe máximo sobre X_E. El *supremo* de los valores de $d^t x$ sobre X_E es igual a 3. Una sucesión de soluciones eficientes cuyos valores asociados convergen al supremo está dada por:

$$x^r \in X_E: \ x_1^r + x_2^r = 2, x_1^r = 1 - \frac{1}{r}, x_3^r = 0, x_4^r = 1$$

En este caso $d^t x^r$ converge a 3 cuando r crece indefinidamente.

Así, el plantaemiento correcto del problema en el caso de problemas de PLEMMO viene dado por:

$$(Q) \ \ sup \ \ d^t x \ \ s.a. \ \ x \in X_E$$

Sea $s \in \Re^p$ tal que $\{x \in X: \ Cx \geq s\} \neq \emptyset$. Se define $f(s)$ como sigue: $f(s) = max\{d^t x: \ Cx \geq s, \ x \in X\}$.

Q puede reescribirse como sigue:

$$(Q) \ \ sup \ \ f(Cx) \ \ s.a. \ \ x \in X, \ \ Cx \ \ \text{es no dominado}$$

El conjunto X_E resulta, en general, no convexo y no conectado y f puede presentar discontinuidades sobre el conjunto de las soluciones no dominadas dificultando el problema notablemente. Podría ocurrir incluso que exista máximo para Q, digamos $z = d^t x^*$, y $d^t x < z - \delta$ para toda $x \in X_E$ con $x \neq x^*$ y $\delta > 0$. En tal caso ningún algoritmo que genere una sucesión de soluciones eficientes con el objetivo de converger al valor del máximo tendrá exito salvo si x^* es generado. Peor aún si δ es grande el algoritmo no puede generar ninguna solución con valor cercano al máximo.

A continuación un ejemplo:

Ejemplo 2:

$$(P)\ \ "max" x_1, x_2\ \ s.a.$$

$$x_1 \leq x_4 + 100(1 - x_4)$$

$$x_2 \leq x_4 + 100(1 - x_4)$$

$$x_1 + x_2 \leq 2x_3 + 100(1 - x_3)$$

$$x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \in \{0,1\}, x_4 \in \{0,1\}$$

Es muy fácil verificar que en este caso tenemos:

$$X_E = \{x \in \Re^4 :\ x_1 + x_2 = 2, x_3 = 1, x_4 = 0\} \cup \{(1,1,0,1)^t\}$$

y el conjunto de las soluciones no dominadas viene dado por $\{(x_1, x_2)^t \in \Re^2 :\ 0 \leq x_1 \leq 2,\ \ x_1 + x_2 = 2\}$

Consideremos Q definido por:

$$(Q)\ \ sup\ \ 100x_4\ \ s.a.\ x \in X_E$$

En este caso es muy fácil verificar que se alcanza un máximo en $(1,1,0,1)^t$ con $v(Q) = 100$. Para cualquier otra solución eficiente se tiene que el valor del funcional es 0. Puede verse claramente la discontinuidad de f sobre el conjunto de las soluciones no dominadas.

Para enfrentar las dificultades presentadas e ilustradas en los ejemplos proponemos relajar el problema Q en el siguiente sentido:

Sea $s \in \Re^p$. Sea $\epsilon > 0$. Se define el conjunto de ϵ-dominadores de s como sigue:

$$D_\epsilon(s) = \{Cx : \ x \in X, \ Cx \geq s, \ \exists j : \ c^{(j)t}x \geq s_j + \epsilon\}$$

Decimos que s es ϵ-no-dominado si y solo si $D_\epsilon(s) = \emptyset$.

Sea $x \in X$. Decimos que x es ϵ-eficiente si y solo si Cx es ϵ-no-dominado.

Sea $X_{E,\epsilon} = \{x \in X : \ x \text{ es } \epsilon\text{-eficiente}\}$.

Como $X_E \subseteq X_{E,\epsilon}$ el siguiente problema es una relajación de Q:

$$(Q_\epsilon) \ \ sup \ \ d^t x \ \ s.a. \ \ x \in X_{E,\epsilon}$$

y Q_ϵ puede reescribirse como sigue:

$$(Q_\epsilon) \ \ sup \ \ f(Cx) \ \ s.a. \ \ x \in X, \ Cx \text{ es } \epsilon\text{-no dominado}$$

Presentaremos un algoritmo tal que dado $\delta > 0$ encuentra $x^* \in X_{E,\epsilon}$ con $d^t x^* \leq v(Q_\epsilon) \leq d^t x^* + \delta$.

Es importante presentar un tercer ejemplo en el cual se ilustra que $v(Q_\epsilon)$ no converge necesariamente a $v(Q)$ cuando ϵ tiende a cero. Así, existe la posibilidad de que la solución generada por el algoritmo pueda tener un valor considerablemente superior a $v(Q)$, esto es, pueden existir soluciones ϵ-eficientes con valor asociado mucho mejor que $v(Q)$ para cualquier ϵ.

Ejemplo 3:

$$(P) \text{ ''}max\text{''} x_1, x_2 \;\; s.a.$$

$$x_1 \leq 2x_5 + 100(1 - x_5)$$

$$x_2 \leq 100(1 - x_5)$$

$$x_1 + x_2 \leq x_3 + 100(1 - x_3)$$

$$x_1 + 2x_2 \leq x_4 + 100(1 - x_4)$$

$$x_3 + x_4 + x_5 = 1$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \in \{0,1\}, x_4 \in \{0,1\}, x_5 \in \{0,1\}$$

Es muy fácil verificar que en este caso tenemos:

$$X_E = \{x \in \Re^5 : \; 0 \leq x_1 < 1, x_1 + x_2 = 2, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 0\} \cup \{(2,0,0,0,1)^t\}$$

y el conjunto de las soluciones no dominadas viene dado por $\{(x_1, x_2)^t \in \Re^2 : \; 0 \leq x_1 < 1, \;\; x_1 + x_2 = 2\} \cup \{(2,0)\}$.

Consideremos Q definido por:

$$(Q) \;\; sup \;\; 100x_4 + x_1 \;\; s.a. \; x \in X_E$$

En este caso es muy fácil verificar que se alcanza un máximo en $(2,0,0,0,1)^t$ con $v(Q) = 2$. Para cualquier otra solución eficiente se tiene que el valor del funcional es estrictamente menor a 1. Consideremos la sucesión definida por:

$$x^r \in X : \; x_1^r + 2x_2^r = 1, x_1^r = 1 - \frac{1}{r}, x_3^r = 0, x_4^r = 1, x_5^r = 0$$

Para cualquier ϵ existe $r(\epsilon)$ suficientemente grande tal que $x^r \in X_{E,\epsilon}$ para todo $r > r(\epsilon)$ y claramente $d^t x^r$ converge a 101 y $101 > v(Q) = 2$.

2 Resultados Teóricos

Se presentan algunos resultados teóricos que permiten definir un algoritmo con las características adelantadas en la introducción.

Algunas propiedades elementales sobre las soluciones eficientes, ϵ-eficientes y los conjuntos $D_\epsilon(s)$, que se infieren directamente de las definiciones, son las siguientes:

Observacion 1 *Sean* $x \in X$, $\hat{x} \in X_E$ *y* $s, \hat{s} \in \Re^p$.

(i) Si $s \leq \hat{s}$ *entonces* $D_\epsilon(\hat{s}) \subseteq D_\epsilon(s)$.

(ii) Si $Cx \leq s$ *y* $D_\epsilon(s) \neq \emptyset$ *entonces* $D_\epsilon(Cx) \neq \emptyset$ *y* $x \notin X_{E,\epsilon}$.

(iii) Si $s \leq Cx$ *y* $D_\epsilon(s) = \emptyset$ *entonces* $D_\epsilon(Cx) = \emptyset$ *y* $x \in X_{E,\epsilon}$.

(iv) Si $x \in X_{E,\epsilon}$ *y* $Cx \leq C\hat{x}$ *entonces* $C\hat{x} < Cx + \epsilon e$.

(v) $D_\epsilon(C\hat{x}) = \emptyset \;\; \forall \epsilon > 0$.

Sea $\hat{x} \in X$ y M lo suficientemente grande como para asegurar: $c^{(j)t}x \geq c^{(j)t}\hat{x} + \epsilon - M \; \forall x \in X, \; \forall j$. Tal M existe porque X es acotado.

Se define el problema $T(\hat{x})$ en (x, y), que servirá para decidir si $x \in X_{E,\epsilon}$ ó $x \notin X_{E,\epsilon}$, como sigue:

$$(T(\hat{x})) \;\; max \;\; \sum_{j=1}^{p} y_j \;\; s.a.$$

$$Cx \geq C\hat{x}$$

$$c^{(j)t}x \geq c^{(j)t}\hat{x} + \epsilon - M(1 - y_j) \;\; \forall j$$

$$x \in X \;, \; y_j \in \{0, 1\} \; (j = 1, \cdots, p)$$

Lema 1 *Sea $\hat{x} \in X$, entonces:*

(i) $F(T(\hat{x})) \neq \emptyset$.

(ii) Existe solución óptima para $T(\hat{x})$.

(iii) $\hat{x} \in X_{E,\epsilon}$ si y solo si $v(T(\hat{x})) = 0$.

Demostración:

(i) $(\hat{x}, 0) \in F(T(\hat{x}))$.

(ii) Como el problema es factible, de la naturaleza de la función objetivo se sigue que el problema admite máximo.

(iii) Por construcción existe $(x, y) \in F(T(\hat{x}))$ con $y \neq 0$ si y solo si $D_\epsilon(C\hat{x}) \neq \emptyset$.$\square$

Sea $\hat{s}$ con $D_\epsilon(\hat{s}) \neq \emptyset$ y sea M lo suficientemente grande como para asegurar: $c^{(j)t}x \geq \hat{s}_j + \alpha + \epsilon - M \; \forall x \in X, \;\; \forall j$.

Tal M existe porque X es acotado.

Se define el problema $E(\hat{s})$ en (x, y, α), que se utilizará en el algoritmo, como sigue:

$$(E(\hat{s})) \;\; max \;\; \alpha \;\; s.a.$$

$$Cx \geq \hat{s} + \alpha e$$

$$c^{(j)t}x \geq \hat{s}_j + \alpha + \epsilon - M(1 - y_j) \; \forall j$$

$$\sum_{j=1}^{p} y_j \geq 1$$

$$x \in X, \; \alpha \in \Re, \; \alpha \geq 0, \; y_j \in \{0, 1\} \; (j = 1, \cdots, p)$$

Lema 2

(i) $F(E(\hat{s})) \neq \emptyset$.

(ii) Existe solución óptima para $E(\hat{s})$.

(iii) Sea $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\alpha})$ *una solución óptima.* $D_\epsilon(\hat{s} + \tilde{\alpha}e) \neq \emptyset$.

(iv) Si $s \in \Re^p$ *y* $s > \hat{s} + \tilde{\alpha}e$ *entonces* $D_\epsilon(s) = \emptyset$.

Demostración:

(i) Sea $\alpha = 0$. Sea $x \in X$ tal que $Cx \in D_\epsilon(\hat{s})$ y k tal que $c^{(k)t}x \geq \hat{s}_k + \epsilon$. Sea y definido por: $y_j = 1$ si y solo si $j = k$. Entonces $(x, y, \alpha) \in F(E(\hat{s}))$.

(ii) X es acotado y $\{0,1\}^p$ finito, se sigue que existe solución óptima.

(iii) De la definición de $E(\hat{s})$ se sigue que $D_\epsilon(\hat{s} + \tilde{\alpha}e) \neq \emptyset$.

(iv) Supongamos $s > \hat{s} + \tilde{\alpha}e$. Sea $\alpha' > 0$ tal que $s \geq \hat{s} + (\tilde{\alpha} + \alpha')e$. Supongamos $D_\epsilon(s) \neq \emptyset$ y sea $x \in X$ tal que $Cx \in D_\epsilon(s)$ y k tal que $c^{(k)t}x \geq s_k + \epsilon$. En tal caso:

$$Cx \geq s \geq \hat{s} + (\tilde{\alpha} + \alpha')e$$

$$c^{(k)t}x \geq s_k + \epsilon \geq \hat{s}_k + (\tilde{\alpha} + \alpha') + \epsilon$$

Sea y definido por $y_j = 1$ si y solo si $j = k$. Entonces $(x, y, \tilde{\alpha} + \alpha') \in F(E(\hat{s}))$ con $\tilde{\alpha} + \alpha' > \tilde{\alpha}$ lo cual contradice la optimalidad de $\tilde{\alpha}$ y se sigue que $D_\epsilon(s) = \emptyset$.$\square$

El siguiente lema, consecuencia del anterior, es clave para la demostración de la finitud del algoritmo que se propondrá.

Lema 3 *Sea* $x \in X_{E,\epsilon}$ *entonces existe* $\alpha > 0$ *tal que* $D_\epsilon(Cx - \alpha e) = \emptyset$.

Demostración:

Sea $\beta > 0$ tal que $D_\epsilon(Cx - \beta e) \neq \emptyset$. Al resolver $E(Cx - \beta e)$ obtenemos $\tilde{\alpha}$ (máximo) tal que $D_\epsilon(Cx - \beta e + \tilde{\alpha} e) \neq \emptyset$. Claramente $\tilde{\alpha} < \beta$ y si $0 < \alpha < \beta - \tilde{\alpha}$ entonces $D_\epsilon(Cx - \alpha e) = \emptyset \Box$

Sea $\gamma > 0$. Supongamos que disponemos de $s^1, \cdots, s^r$ tal que $D_\epsilon(s^i) \neq \emptyset$ $\forall i$ y $x^* \in X_{E,\epsilon}$. Sea $z = d^t x^*$ y sea M lo suficientemente grande como para asegurar: $c^{(j)t} x \geq s^i_j + \alpha - M$ para todo $x \in X$, $\forall i$, $\forall j$. Tal M existe porque X está acotado.

Resolver el siguiente problema en $(x, y^1, \cdots, y^r, \alpha)$ constituye el paso fundamental del algoritmo que presentaremos:

$$(G^r)\ max\ \alpha\ s.a.$$

$$c^{j^t} x \geq s^i_j + \alpha - M(1 - y^i_j)\ \forall i\ \forall j$$

$$d^t x \geq z + \gamma$$

$$\sum_{j=1}^{p} y^i_j \geq 1$$

$$x \in X,\ y^i \in \{0,1\}^p,\ \alpha \in \Re,\ \alpha \geq 0,\ i = 1, \cdots, r$$

Lema 4 *$F(G^r) = \emptyset$ o $v(G^r) = 0$ si y solo si no existe $x \in X_{E,\epsilon}$ con $d^t x \geq z + \gamma$.*

Demostración: Sea $x \in X_{E,\epsilon}$ con $d^t x \geq z + \gamma$. Como $x \in X_{E,\epsilon}$ entonces para cada i existe j_i tal que $c^{j_i t} x > {s^i}_{j_i}$. De lo contrario existe i con $Cx \leq s^i$ pero $D_\epsilon(s^i) \neq \emptyset$ lo que contradice la observación 1.

Sea $y^i_j = 1$ si y solo si $j = j_i$. Si tomamos $\alpha = min\{c^{j_i t} x - {s^i}_{j_i} : (i = 1, \cdots, r)(j = 1, \cdots, p)\}$ entonces $(x, y^1, \cdots, y^r, \alpha) \in F(G^r)$ con $\alpha > 0$.

La otra implicación se desprende de la definición de G^r $\Box$

3 Algoritmo

El Algoritmo consta de dos fases. En la Fase 1 se resuelve Q_ϵ para los casos triviales o se encuentran $s^1 \in \Re^p$ con $D_\epsilon(s^1) \neq \emptyset$ y $x^* \in X_{E,\epsilon}$ con $z = d^t x^* \leq sup(Q_\epsilon)$ necesarios para comenzar Fase 2

Fase 1:

Paso-0: Resolver el siguiente problema:

$$(P^0) \;\; max \;\; d^t x \; s.a. \; x \in X$$

Sea $\hat{x}$ solución óptima de P^0.

Paso-1: Resolver $T(\hat{x})$.

Si $v(T(\hat{x})) = 0$ entonces FIN, caso contrario hacer $s^1 = C\hat{x}$ y seguir.

Paso-2: Resolver el siguiente problema con $\lambda > 0$ arbitrario:

$$(P^1(\hat{x})) \; max \;\; \lambda^t C x \; s.a. \; x \in X, \; Cx \geq C\hat{x}$$

Sea $\tilde{x}$ solución óptima de $P^1(\hat{x})$.

Paso-3: Resolver el siguiente problema:

$$(P^2(\tilde{x})) \; max \;\; d^t x \; s.a. \; x \in X, \; Cx \geq C\tilde{x}$$

Sea x^* solución óptima de $P^2(\tilde{x})$ y sea $z = v(P^2(\tilde{x}))$.

Fin de la Fase 1.

Todos los problemas involucrados en la Fase 1 son factibles y con solución óptima lo cual se desprende de que $X \neq \emptyset$ y es acotado.

Sea $\hat{x}$ solución óptima de P^0. Si $v(T(\hat{x})) = 0$ entonces $\hat{x} \in X_{E,\epsilon}$ y claramente en este caso $d^t \hat{x} = v(Q_\epsilon)$ lo cual justifica el Paso-1. De la definición de

$P^1(\hat{x})$ se sigue que $\tilde{x} \in X_E$ con lo cual $\tilde{x} \in X_{E,\epsilon}$. De la definición de $P^2(\tilde{x})$ se sigue que $x^* \in X_{E,\epsilon}$ de donde $d^t\tilde{x} \leq d^t x^* = z \leq v(Q_\epsilon)$.

Al terminar la Fase 1, si no se ha resuelto Q_ϵ, disponemos de:

s^1 con $D_\epsilon(s^1) \neq \emptyset$ y $x^* \in X_{E,\epsilon}$ con $z = d^t x^* \leq v(Q_\epsilon)$.

En la Fase 2, que se presentará a continuación, por *reducir* γ se entiende que el valor de γ decrece de tal manera que en un número finito de pasos se tendrá $0 < \gamma \leq \delta$ (por ejemplo: $\gamma := \frac{\gamma}{t}$ para $t > 1$ fijo).

En los pasos 4 y 5 se presentan dos alternativas. Se entiende que cualquier implantación del algoritmo debe tener incluída heurísticas para decidir en cada oportunidad cuál de las alternativas se ejecuta. La prueba de finitud del algoritmo, que se presentará luego, es válida independientemente de las alternativas que se ejecuten en cada oportunidad.

Fase 2:

Paso-0: $r = 1$.

Paso-1: Resolver G^r.

Paso-2: Si $F(G^r) = \emptyset$ o $v(G^r) = 0$ entonces: Si $\gamma \leq \delta$ FIN, en caso contrario *reducir* γ e ir al Paso-1.

Paso-3: Resolver $T(\hat{x})$ con $(\hat{x}, \hat{y^1}, \cdots, \hat{y^r}, \hat{\alpha})$ la solución óptima de G^r encontrada en el Paso-1.

Paso-4: Si $v(T(\hat{x})) = 0$ entonces:

Alternativa-1: Hacer $x^* = \hat{x}$ y $z = d^t\hat{x}$ e ir Paso-1.

Alternativa-2: Resolver $P^2(\hat{x})$. Si x es solución óptima hacer $x^* = x$ y $z = d^t x^*$ e ir Paso-1.

Paso-5:

Alternativa-1: Hacer $s^{r+1} = C\hat{x}$ e ir Paso-1.

Alternativa-2: Resolver $E(C\hat{x})$. Hacer $s^{r+1} = C\hat{x} + v(E(C\hat{x}))e$ e ir Paso-1.

Lema 5 *Supongamos que en la Fase 1 no se resolvió Q_ϵ, entonces: en la Fase 2 se encuentra, en un número finito de pasos, $x^* \in X_{E,\epsilon}$ con $d^t x^* \leq v(Q_\epsilon) \leq d^t x^* + \delta$.*

Demostración: Si $F(G^r) = \emptyset$ o $v(G^r) = 0$ y $\gamma \leq \delta$ entonces del lema 4 se desprende de inmediato que $d^t x^* \leq v(Q_\epsilon) \leq z + \delta = d^t x^* + \delta$.

Para γ fijo, supongamos que $F(G^r) \neq \emptyset$ y $v(G^r) > 0$ en todas las iteraciones.

En tal caso a partir de r suficientemente grande el valor de z se estabiliza, digamos en $\hat{z}$, de lo contrario Q_ϵ tendría solución no acotada lo cual no es posible porque X es acotado.

Sea $S^i = \{s \in \Re^p : \ s \leq s^i\}$ para cada i. Sea $\tilde{x} \in X_{E,\epsilon}$ con $d^t \tilde{x} \geq \hat{z} + \delta$. Como en Sylva y Crema[5] podemos demostrar que la sucesión de valores optimales, $v(G^r)$, es monótona y converge a cero y en consecuencia las distancias en norma infinito desde $C\tilde{x}$ hasta $\cup_{i=1}^r S^i$ que denotaremos $D^r(C\tilde{x})$, forman una sucesión que converge a cero.

Sea $\alpha' > 0$ tal que si $s > C\tilde{x} - \alpha' e$ entonces $D_\epsilon(s) = \emptyset$. Como $C\tilde{x} - \alpha' e < C\tilde{x}$ y como $D^r(C\tilde{x})$ converge a cero se sigue que el algoritmo debe generar, para r suficientemente grande, s^r con $C\tilde{x} - \alpha' e < s^r$, pero en tal caso, por la observación 1, $D_\epsilon(s^r) = \emptyset$ lo cual es una contradicción porque el algoritmo genera s^r con $D_\epsilon(s^r) \neq \emptyset$ para todo r.

Se sigue que para γ fijo la condición $F(G^r) = \emptyset$ o $v(G^r) = 0$ ocurre en un número finito de pasos. Como el proceso de *reducir* γ asegura que $\gamma < \delta$ en un número finito de pasos entonces el algoritmo es finito y encuentra x^* con las propiedades requeridas.$\square$

4 Bibliografía

[1] Ehrgott,M and Gandibleux,X.: A survey and annotated bibliography of multiobjective combinatorial optimization. OR Spektrum (2000) 22: 425-460.

[2] Alves,M.J. and Clímaco,J.: A review of interactive methods for multiobjective integer and mixed integer programming. European Journal of Operational Research, (2007) 180: 99-115.

[3] Yamamoto,Y.: Optimization over the efficient set: Overview. Journal of Global Optimization, (2002) 22: 285-317

[4] Jorge,J.: An algorithm for optimizing a linear function over an integer efficient set. European Journal of Operational Research, (2009) 195: 98-103.

[5] Sylva,J and Crema,A.: A method for finding well-dispersed subsets of non-dominated vectors for multiple objective mixed integer linear programs. European Journal of Operational Research, (2007) 180: 1011-1027.